$$PV_3 = \int_0^T 100e^{-\rho t}dt = 100 \cdot \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho}.$$

Подставляя сюда значение $\rho = \ln 1.5 \approx 0.4055$ год$^{-1}$, получим $PV_3 = 82.21$ млн р.

В рассмотренном примере в качестве единицы времени выбран год. Результат не изменится, если выбрать любую другую единицу. Если бы мы выбрали квартал, нам пришлось бы в соответствующих единицах выразить и интенсивность потока: $v(t) = 25$ млн р./кв., и силу роста: $\rho = 0.4055/4 = 0.1014$ кв$^{-1}$ (заметим, что единица силы роста имеет размерность, и пересчет этой величины из одних единиц в другие производится обычным образом). Итак,

$$PV_3 = \int_0^4 25e^{-\rho t}dt = 25\frac{1 - e^{-4\rho}}{\rho} = 82.21 \text{ млн р.}$$

Переход от годичного *периода* к квартальному изменял временн›е характеристики потока: в первом случае рассчитывалась сегодняшняя ценность суммы, однократно получаемой в конце года, во втором — четырехкратного поступления выручки в конце каждого квартала. Переход от одной единицы времени к другой в непрерывной модели оставляет свойства потока неизменными: в обоих случаях годовая сумма распределена на интервале продолжительностью в год с постоянной интенсивностью.

XIII. Эластичность производственной функции, отдача от масштаба и распределение дохода

В настоящем разделе будет изложена и доказана одна важная теорема, относящаяся к распределению дохода. Но это будет в самом конце. Прежде придется обсудить некоторые свойства производственных функций и функций затрат.

Попутно у читателя будет возможность убедиться в том, что эластичности различных зависимостей — не только средство эмпирического описания наблюдаемых явлений, но и весьма эффективный инструмент теоретического анализа.

Перед чтением настоящей статьи, возможно, полезно будет вспомнить определение и основные свойства эластичностей — они изложены в Математическом приложении II.

Две отдачи от масштаба

Рассматривается производственная функция фирмы

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

связывающая объем производства продукта q с объемами использования ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Под частной эластичностью производственной функции по объему i-того ресурса понимается величина

$$e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f}.$$

Изменение объема выпуска при *пропорциональном* изменении объемов использования всех ресурсов характеризуется общей эластичностью производственной функции

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i .$$

При изложении теории производства в части III мы фактически пользовались двумя различными понятиями отдачи от масштаба.

Говоря о производственной функции, мы связывали масштаб производства с использованием всех ресурсов при сохранении пропорций между ними: например, «увеличить масштаб в два раза» означало увеличить использование каждого ресурса вдвое. Если при этом выпуск продукции возрастает более чем в два раза, говорят о возрастающей отдаче от масштаба, в противном случае — об убывающей, а если выпуск увеличится ровно в два раза, то о постоянной отдаче от масштаба. Именно это свойство производственной функции отражает общая эластичность: отдачу от масштаба называют возрастающей, постоянной или убывающей в зависимости от знака соотношения

$$E \gtreqless 1. \tag{1}$$

Определяемую таким образом отдачу от масштаба будем называть *отдачей от масштаба в смысле производственной функции* (ПФ-*отдачей от масштаба*).

Другое определение связано с функцией затрат длительного периода. Если средние затраты *LAC* с ростом объема выпуска убывают, то говорят о возрастающей отдаче от масштаба, а если возрастают — об убывающей. (Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о затратах длительного периода, букву *L* в обозначении затратных функций мы будем опускать). Отдачу от масштаба, соответствующую этому определению, будем называть *отдачей от масштаба в смысле функции затрат* (ФЗ-*отдачей от масштаба*). ФЗ-отдача от масштаба соответственно связана с эластичностью функции затрат.

Функция общих затрат $TC(q)$ имеет единственный аргумент — объем выпуска, поэтому можно говорить об ее эластичности, не уточняя, по какому аргументу. Средние затраты определяются как отношение $AC(q) = TC(q)/q$. Из общих свойств эластичности следует, что эластичность отношения равна разности эластичностей числителя и знаменателя; но $\mathrm{E}_q[q] = 1$, так что

$$\mathrm{E}[AC] = \mathrm{E}[TC] - 1.$$

Возрастающая функция имеет положительную эластичность, убывающая — отрицательную. Таким образом, знак соотношения

$$\mathrm{E}[TC] \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1 \tag{2}$$

показывает, будет ли ФЗ-отдача от масштаба возрастающей, постоянной или убывающей соответственно.

Напомним, что эластичность является локальной характеристикой функции: ее значения изменяются при переходе от одного значения аргумента к другому (или от одной комбинации аргументов, если их несколько, к другой). При обсуждении затрат длительного периода мы рассматривали как типичный U-образный характер изменения средних затрат. При малых значениях q функция AC убывала, затем проходила свое минимальное значение, а при больших q — возрастала. Это означает, что малым значениям q отвечают значения $\mathrm{E}[TC] < 1$, при больших — имеет место неравенство $\mathrm{E}[TC] > 1$. Эффективному размеру фирмы соответствует минимум AC, т. е. такой объем производства, при котором $\mathrm{E}[TC] = 1$.

Одна отдача от масштаба

В этом пункте мы рассмотрим связь между эластичностями производственной функции и функции затрат. Из выполненного анализа будет, в частности, следовать, что оба приведенных выше определения отдачи от масштаба эквивалентны, что позволит нам в дальнейшем говорить об отдаче от масштаба, не уточняя, в каком смысле мы употребляем этот термин.

Рассмотрим вначале случай, когда производство потребляет единственный ресурс в количестве x, так что производственная функция зависит от одного аргумента: $q = f(x)$. Считая цену ресурса постоянной, можно для потребляемого количества ресурса использовать не натуральное, а денежное выражение; в таком случае производственную функцию можно представить в виде $q = f^*(px) = f^*(C)$, где p — цена ресурса; C — затраты.

Функция затрат $C = TC(q)$ является обратной по отношению к f^*, и в силу известного свойства эластичности $\mathrm{E}_q[TC] = 1/\mathrm{E}_C[f^*]$. Так как функция f^* отличается от f лишь постоянным множителем p при аргументе, справедливо равенство

$$\mathrm{E}_q[TC] = \frac{1}{\mathrm{E}_x[f]}.$$

Так как x — единственный потребляемый ресурс, эластичность $\mathrm{E}_x[f]$ — это полная эластичность производственной функции, которую мы обозначаем буквой E. Обозначение единственного аргумента функции можно опустить, так что для случая единственного ресурса мы получили утверждение:

$$\mathrm{E}[TC] = \frac{1}{E}.$$

Теперь предстоит доказать, что это равенство справедливо и в случае произвольного числа ресурсов.

Прежде всего заметим, что эластичность общих затрат удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{E}[TC] = \frac{q}{TC(q)} \cdot \frac{dTC(q)}{dq} = \frac{MC(q)}{AC(q)}. \tag{3}$$

Вспомним, что значением функции затрат для каждого объема выпуска q является *наименьшая* величина затрат, позволяющая производить продукт в количестве q. Иными словами, значение $TC(q)$ есть решение задачи

$$TC(q) = \min \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

при условии

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q.$$

Именно этому требованию подчиняются выбираемые фирмой комбинации ресурсов, определяющие экономически эффективные способы производства.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - q],$$

где l — множитель Лагранжа (см. Математическое приложение V). Заметим, что

$$\frac{dTC(q)}{dq} = \lambda.$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по всем x_i, найдем условия минимума:

$$p_i - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots ,\ n.$$

Используя условия минимума, представим затраты в виде

$$TC(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i.$$

Разделив обе части на q, получим

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i = MC(q) \cdot E.$$

С учетом равенства (3) получаем

$$\mathrm{E}[TC] = \frac{MC(q)}{AC(q)} = \frac{1}{E}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

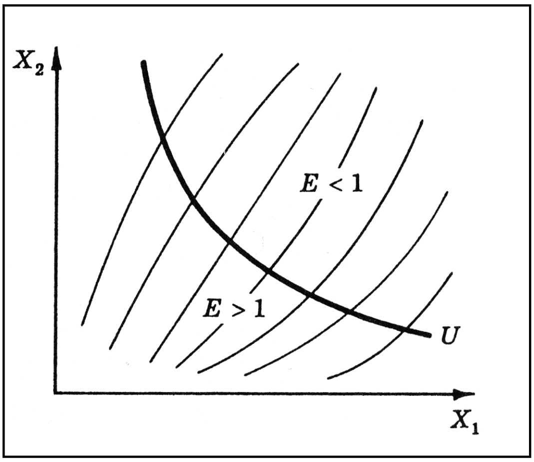
ТЕОРЕМА. *Пусть при фиксированных ценах ресурсов вектор* $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_n)$ *описывает экономически эффективный вариант производства,* q *— объем продукта по этому варианту. Тогда*

$$\mathrm{E}[TC] = \frac{1}{E}, \tag{4}$$

где $\mathrm{E}[TC]$ *и* E *— значения эластичностей в точках* q *и* $\mathbf{X}$ *соответственно.*

Следствием рассмотренной теоремы является эквивалентность двух ранее введенных определений отдачи от масштаба. Критериальные соотношения (1) для ПФ-отдачи и (2) для ФЗ-отдачи равносильны.

Значения функции $TC(q)$ — затраты, соответствующие экономически эффективному варианту производства, обеспечивающему объем продукта q. Все варианты, экономически эффективные при заданных ценах ресурсов, в пространстве ресурсов представлены точками *линии роста* фирмы — изоклины производственной функции, соответствующей данному соотношению цен. Если кривая AC имеет U-образную форму, то, как следует из полученных результатов, на ближнем (от начала координат) участке изоклины имеет место неравенство $E > 1$, а на дальнем — неравенство $E < 1$.



Униэла (U) и линии роста.

Если допустить, что при любой комбинации цен ресурсов кривая AC имеет U-образную форму, то все пространство ресурсов разбивается на две области, разделенные общей границей (на плоскости — кривой), на которой выполняется равенство $\mathrm{E}[f] = 1$. Назовем эту границу *униэлой* производственной функции (от *лат.* unus — один и слова «эластичность»). На рисунке она обозначена буквой U. При сделанном допущении униэла пересекается со всеми изоклинами. Эффективный масштаб фирмы определяется точкой пересечения линии роста, отвечающей данному соотношению цен ресурсов, с униэлой.

Следствие для теории распределения

Рассмотрим фирму, максимизирующую прибыль при постоянных ценах продукта и ресурсов и при этом имеющую эффективный размер, так что для этой фирмы $\mathrm{E}[TC] = 1$. Как показывает равенство (4), для нее выполняется условие $\mathrm{E}[f] = 1$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 1. \tag{5}$$

Пусть производимый фирмой продукт продается на рынке по цене P; для выручки фирмы используем стандартное обозначение $TR = P \cdot q$. Почленно умножая последнее равенство на $P \cdot q$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(P \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot x_i = TR. \tag{6}$$

Выражение в скобках — предельная отдача i-того ресурса при цене продукта, не зависящей от выпуска; она равна цене ресурса p_i, если последняя не зависит от объема использования ресурса. Итак, мы пришли к классическому утверждению теории функционального распределения дохода — утверждению об исчерпаемости дохода:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = TR.$$

Смысл этого равенства в том, что выручка фирмы в точности равна доходам, которые получают владельцы факторов, используемых фирмой.

К этому же утверждению приводит допущение о том, что производственная функция является однородной функцией первой степени, или линейно однородной, и потому удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = f.$$

Умножая обе части последнего равенства на P — цену продукта, мы снова придем к утверждению (6).

Допущение о линейной однородности производственной функции является слишком сильным и противоречит некоторым естественным представлениям о характеристиках производства. Однородность — глобальное свойство функции. Полная эластичность линейно однородной производственной функции равна 1 при любых значениях аргументов. Из этого в свою очередь следовало бы, что средние затраты не зависят от объема выпуска,— любой объем был бы равно эффективным.

В отличие от этого приведенный выше вывод исходит из допущений, которые выполняются для фирм в условиях конкурентного равновесия длительного периода на товарных и факторных рынках. Если таково состояние всех рынков в стране, то к выводу об исчерпаемости национального дохода можно прийти без допущения о линейной однородности производственной функции.

Упражнения

1. Введем в рассмотрение *эластичность производственной функции в коротком периоде*, характеризующую изменение объема продукта при пропорциональном изменении потребления *переменных* ресурсов; обозначим ее E^s. Покажите, что $E^s < E$.

2. Докажите теорему — аналог утверждения (4) для короткого периода:

$$\mathrm{E}[VC] = \frac{1}{E^s}.$$

3. В коротком периоде при снижении цены ниже некоторого уровня фирма прекращает производство. Соответствующая точка кривой предложения получила название *точки остановки производства* (shutdown point).[1] В этой точке пересекаются кривые AVC и SMC.

Докажите, что при потреблении ресурсов, соответствующем точке остановки производства, выполняется неравенство $E > 1$.

[1] Этот вопрос обсуждался в лекции 25, хотя термин «точка остановки производства» не использовался.

4. Обозначим q^* объем производства, соответствующий эффективному масштабу фирмы. Если $q \neq q^*$, равенство (6) окажется нарушенным. Какой знак неравенства следует поставить на место знака равенства: а) при $q < q^*$; б) при $q > q^*$? Приведите экономическую интерпретацию полученных результатов.