По отношению к моменту покупки все платежи по первой схеме производятся на 4 года позже, чем по второй. Поэтому в первом случае величина каждого платежа (а следовательно, и всей суммы) в $1.25^4 \approx 2.44$ раза больше, чем во втором.

XII. Дисконтирование в непрерывном времени

В лекциях 18 и 38 мы пользовались понятием сегодняшней ценности потока ожидаемых в будущем доходов. Поток доходов представлялся последовательностью уровней V_t, $t = 1, 2, \ldots, T$, где t — номер периода; V_t — доход, получаемый в течение t-го периода.

Величина сегодняшней ценности описывалась выражением

$$PV = \sum_{t=1}^{T} V_t \cdot (1+r)^{-t}. \tag{1}$$

Здесь r — процентная ставка за один период.

При этом по существу использовалось предположение о том, что в каждом из периодов доход поступает одномоментно. Процентная ставка r соответствует промежутку времени продолжительностью в один период. Если считать, что «сегодня», т. е. момент, к которому приводятся будущие доходы, — это конец нулевого и начало первого периода, то момент поступления дохода V_1 — это конец первого периода, V_2 — конец второго и т. д. Таким образом, равенство (1) предполагает, что доход каждого периода поступает одномоментно в конце периода.

На практике выражения вида (1) для сегодняшней ценности применяются и в случаях, когда доход поступает более часто; при этом под V_t понимается весь доход, ожидаемый в течение t-го периода. Так как доход поступает частями в различные моменты периода, формула (1) при таком применении оказывается приближенной. Если процентная ставка за период невысока, то и погрешности будут невелики, но при больших значениях процентной ставки погрешностями уже нельзя пренебречь.

Другим приближением к действительности служит представление будущих доходов в виде *непрерывного* потока. При этом основной характеристикой потока является его *интенсивность* — доход в единицу времени. Если $V(t, t+\Delta t)$ — доход в течение промежутка времени $(t, t+\Delta t)$, то средняя интенсивность потока на этом промежутке равна $V(t, t+\Delta t)/\Delta t$. Мгновенное значение интенсивности потока в *момент* времени t можно определить как предел средней интенсивности для интервала, продолжительность которого стремится к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Если воспользоваться механической аналогией, то доход за некоторый промежуток времени можно уподобить пути, проходимому за этот промежуток движущимся телом; в таком случае интенсивность потока доходов в некоторый момент времени подобна скорости в этот момент. Как и скорость, интенсивность потока может непрерывно изменяться от одного момента времени к другому. Если интенсивность потока как функция времени известна, то величина дохода в течение произвольного промежутка времени $(t_1,\ t_2)$ выражается интегралом

$$V(t_1,\ t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Рассмотрим теперь короткий промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$. Доход за этот промежуток времени приблизительно равен $v(t)\Delta t$; считаем, что разновременностью поступления дохода в течение короткого промежутка времени можно пренебречь. В этом случае сегодняшняя ценность этого дохода равна приблизительно $v(t)\Delta t \cdot (1+r)^{-t}$, где r — процентная ставка, соответствующая *единице* времени (как показано в лекции 18, для того чтобы эта формула была справедливой, t не обязательно должно быть целым числом). Разбивая весь период поступления доходов $[0,\ T]$ на большое число N равных интервалов ($\Delta t = T/N$), получим приближенное выражение для сегодняшней ценности

$$PV \approx \sum_{k=1}^{N} v(t_k)\Delta t \cdot (1+r)^{-t_k},$$

тем более точное, чем меньше каждый из интервалов Δt. Точное значение получим, переходя к пределу

$$PV = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} v(t_k) \cdot (1+r)^{-t_k} \cdot \Delta t.$$

Под знаком предела стоит интегральная сумма, так что предел есть интеграл

$$PV = \int_0^T v(t)(1+r)^{-t} dt. \qquad (2)$$

Выражение (2) дает точное значение приведенной ценности потока доходов в непрерывном времени. Однако если время рассматривается как непрерывная величина, вместо процентной ставки r удобнее пользоваться другой характеристикой — силой роста, $\rho = \ln(1 + r)$. Ее использование позволяет представить равенство (2) в равносильной форме

$$PV = \int_0^T v(t)e^{-\rho t} dt. \qquad (3)$$

Для чего нужно дисконтирование в непрерывном времени?

Во-первых, во многих теоретических моделях выделение тех или иных периодов (год, месяц и т. д.) носило бы искусственный характер и никакому из них нельзя было бы отдать предпочтение. Непрерывное представление потоков и соответствующая форма дисконтирования более естественны для таких моделей.

Во-вторых, и во многих практических случаях непрерывное представление потоков сочетает достаточно высокую точность со значительным практическим удобством.

Допустим, ваша фирма предполагает выпускать некоторый продукт в течение года и за этот период получить выручку 100 млн р.; продаваться продукт должен более или менее равномерно в течение года. Годовая процентная ставка составляет 50 %.

Можно рассмотреть дискретный поток с расчетным периодом, равным году. В этом случае поток будет представлен одним уровнем $V_1 = 100$, и соответствующее приближение для сегодняшней ценности будет равно

$$PV_1 = \frac{100}{1+0.5} = 66.67 \text{ млн р.}$$

Как было замечено выше, фактически это сегодняшняя ценность дохода в 100 млн р., поступающего *в конце года*, что не соответствует предполагаемой динамике выручки. Более точный результат мы получим, если в качестве периода будет выбран квартал и поток будет представлен четырьмя одинаковыми уровнями — по 25 млн р. каждый. По годовой процентной ставке $r_{\text{г}} = 0.5$ рассчитаем процентную ставку $r_{\text{кв}}$ для периода, равного кварталу:

$$1 + r_{\text{кв}} = (1 + r_{\text{г}})^{1/4} = 1.5^{1/4} \approx 1.1067.$$

Теперь мы получаем следующее приближение для сегодняшней ценности:

$$PV_2 = \sum_{t=1}^{4} \frac{25}{1.1067^t} = 78.11 \text{ млн р.}$$

Так как продажи совершаются ежедневно, можно, конечно, разбить год на периоды, каждый из которых равен одному дню. Но такой громоздкий расчет едва ли оправдан, и не только из-за громоздкости. Едва ли дневная выручка будет *строго* одинаковой во все дни года. Исходное предположение сводилось к тому, что продажи распределены в течение года *более или менее* равномерно, ничего более определенного сказать нельзя. Поэтому проще всего не разбивать год на периоды, а считать интенсивность потока выручки примерно постоянной и равной 100 млн р./год. В этом случае

$$PV_3 = \int_0^T 100e^{-\rho t}dt = 100 \cdot \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho}.$$

Подставляя сюда значение $\rho = \ln 1.5 \approx 0.4055$ год$^{-1}$, получим $PV_3 = 82.21$ млн р.

В рассмотренном примере в качестве единицы времени выбран год. Результат не изменится, если выбрать любую другую единицу. Если бы мы выбрали квартал, нам пришлось бы в соответствующих единицах выразить и интенсивность потока: $v(t) = 25$ млн р./кв., и силу роста: $\rho = 0.4055/4 = 0.1014$ кв$^{-1}$ (заметим, что единица силы роста имеет размерность, и пересчет этой величины из одних единиц в другие производится обычным образом). Итак,

$$PV_3 = \int_0^4 25e^{-\rho t}dt = 25\frac{1 - e^{-4\rho}}{\rho} = 82.21 \text{ млн р.}$$

Переход от годичного *периода* к квартальному изменял времен›е характеристики потока: в первом случае рассчитывалась сегодняшняя ценность суммы, однократно получаемой в конце года, во втором — четырехкратного поступления выручки в конце каждого квартала. Переход от одной единицы времени к другой в непрерывной модели оставляет свойства потока неизменными: в обоих случаях годовая сумма распределена на интервале продолжительностью в год с постоянной интенсивностью.

XIII. Эластичность производственной функции, отдача от масштаба и распределение дохода

В настоящем разделе будет изложена и доказана одна важная теорема, относящаяся к распределению дохода. Но это будет в самом конце. Прежде придется обсудить некоторые свойства производственных функций и функций затрат.

Попутно у читателя будет возможность убедиться в том, что эластичности различных зависимостей — не только средство эмпирического описания наблюдаемых явлений, но и весьма эффективный инструмент теоретического анализа.

Перед чтением настоящей статьи, возможно, полезно будет вспомнить определение и основные свойства эластичностей — они изложены в Математическом приложении II.