XI. Разные схемы обслуживания долга

Многие финансовые операции в конечном счете сводятся к тому, что одна сторона (фирма, домашнее хозяйство) дает другой стороне деньги взаймы, а та через обусловленное время возвращает взятую сумму с процентами. И у кредитора, и у заемщика могут быть определенные соображения по поводу того, когда и в каких количествах следует возвращать взятую взаймы сумму и проценты, так что стороны договариваются не только об общей сумме, но и о временно́й схеме платежей, или, как принято говорить, схеме *обслуживания* долга. От схемы обслуживания долга, а не только от взятой взаймы суммы (основного долга), общего срока займа и процентной ставки зависит возвращаемая сумма.

Рассмотрим вначале числовые примеры.

Допустим, вы взяли взаймы 4000 р. сроком на 2 года под 25 % годовых. Погашение одним платежом в конце срока. Какую сумму вы должны вернуть кредитору?

Если вы знакомы с лекцией 18, ответ для вас очевиден:

$$4000(1+0.25)^2 = 6250 \text{ р.}$$

При желании этот результат можно разложить следующим образом:
4000 р. — возврат долга;
1000 р. — проценты за 1-й год;
250 р. — проценты на проценты 1-го года;
1000 р. — проценты за 2-й год.

Но вы могли договориться с кредитором иначе. Например, выплачивать проценты в конце каждого года. В конце 1-го года вам нужно будет заплатить 1000 р. Это равносильно тому, что в конце 1-го года вы вернули долг с процентами и сразу же взяли взаймы снова 4000 р. на 1 год, так что к концу 2-го года вам останется вернуть 4000 р. долга и 1000 р. процентов. В этом случае кредитор получит с вас в качестве процентов всего 2000 р.: 1000 — в конце 1-го года и 1000 — в конце 2-го года.

Но возможны и другие схемы. Можно, скажем, заплатить проценты сразу, чтобы через два года вернуть 4000 р. и тем самым окончательно рассчитаться. Сколько же надо было бы заплатить за заем в этом случае? Пусть x — величина платежа. Ясно, что в этом случае вы фактически берете в долг $(4000-x)$ р., а возвращаете через 2 года 4000, т. е.

$$(4000-x)\cdot 1.25^2 = 4000,$$

так что $4000-x = 2560$, или $x = 1440$.

Отметим, что в первом случае в качестве процентов выплачено

2250 р. через два года после получения займа, во втором — 2000 частями, в третьем как будто всего 1440 р. в момент получения займа. Обратим внимание на слова «как будто»: третий случай можно также интерпретировать как двухлетний заем в 2560 р. с выплатой процентов в сумме 1440 р. в конце срока.

Можно придумать много других схем уплаты процентов. Но можно возвращать частями и основной долг, что дополнительно увеличит число возможных схем.

Например, можно взять 4000 р., через год вернуть 2778 р., еще через год — еще 2778 (суммы округлены до целых значений). При этом можно считать, что через год возвращено 2778 р. основного долга, а к концу второго года — остальные 1222 р. основного долга и еще 1556 р. — проценты. А можно иначе: каждый год по 2000 р. основного долга и по 778 р. процентов. Читатель может самостоятельно провести расчеты и убедиться, что все они соответствуют условию предоставления займа под 25 % в год.

Последний пример показывает, что разделение возвращаемых сумм на возврат основного долга и уплату процентов весьма условно. То или иное разложение может быть более или менее удобно для расчета «на пальцах» — не более того. Как говорится, «все рубли одинаковы». Логика формирования процентного дохода, описанная в разделе 2 лекции 18, показывает, что возвращаемые суммы должны удовлетворять единственному условию: *сегодняшняя ценность (PV) возвращаемых сумм должна быть равна величине займа*. Если вы взяли в долг сумму V под процентную ставку r за период и возвращаете через t периодов суммы W_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, то единственное требование, которому должны отвечать суммы, сводится к выполнению равенства

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{W_t}{(1+r)^t}.$$

Рассмотрим схему, предполагающую погашение долга вместе с процентами равными суммами, выплачиваемыми в течение ряда периодов. Вносимая сумма получила название *аннуитета*.[1] Различают аннуитеты *постнумерандо* (платеж производится в конце каждого периода) и *пренумерандо* (в начале периода).

Найдем величину аннуитета a, выплачиваемого в конце каждого из T периодов в погашение долга V. Для этого положим $W_t = a = \text{const}$:

$$V = a \cdot \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} = a\frac{(1+r)^{-1} - (1+r)^{-T-1}}{1-(1+r)^{-1}},$$

[1] От *позднелат.* annuitas — ежегодный платеж. В современной терминологии аннуитетом называется постоянная сумма, вносимая периодически, независимо от продолжительности периода.

или, после упрощения,

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - (1+r)^{-T}\right],$$

откуда

$$a = \frac{rV}{1 - (1+r)^{-T}}. \tag{1}$$

Если срок возврата долга (T) очень велик, то знаменатель в последнем выражении близок к 1, так что $W \approx rV$; точнее,

$$\lim_{T \to \infty} a = rV.$$

Отсюда следует, что «вечный долг» в сумме V требует от должника ежегодных платежей в размере rV. Это можно интерпретировать следующим образом: если через год выплачены проценты за год в размере rV, то долг не изменяется, и с каждым годом процесс воспроизводится. Если сумма в 4000 р. взята под 25 % «в долг навсегда», то достаточно ежегодно выплачивать по 1000 р. Впрочем, в момент очередного платежа вы можете вернуть «основной долг» — вместе с очередным взносом в 1000 р. заплатить еще 4000 и на этом прекратить платежи.

В разделе 1 лекции 38 обсуждалась аналогия между поведением кредитора и поведением инвестора. Здесь мы видим, что соотношение между суммой вечного долга и его аннуитетом совпадает с соотношением между капитальной и прокатной ценами вечного ресурса.

Выше мы рассматривали схемы расчетов, при которых должник получал сумму займа одномоментно, а возвращать долг мог частями. Теперь мы рассмотрим обратную операцию, когда должник получает сумму частями, а возвращает в конце срока одномоментно. Подобная ситуация возникает, например, в случаях, когда вкладчик (кредитор) накапливает нужную ему сумму, делая периодические взносы на свой счет в банке, выступающем в роли должника. Схемы такого рода называют *накопительными*.

Пусть величина взноса в момент t равна v_t. Обозначим W сумму долга с процентами, образующуюся в конце процесса накопления, т. е. после момента T. По-прежнему должно выполняться равенство сегодняшних ценностей долга и его погашения:

$$\sum_{t=1}^{T} v_t \cdot (1+r)^{-t} = W \cdot (1+r)^{-T}.$$

В частности, если взносы должны быть равными ($v_t = v$), то равенство принимает вид

$$v\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t} = v\frac{(1+r)^{-1}+(1+r)^{-T-1}}{1-(1+r)^{-1}} = \frac{v}{r}\left[1-(1+r)^{-T}\right] =$$

$$= W\cdot(1+r)^{-T},$$

откуда

$$v = W\cdot\frac{r}{(1+r)^{T}-1}. \tag{2}$$

Для подобных расчетов несколько удобнее пользоваться не величиной сегодняшней ценности, а величиной *будущей ценности* (*FV* — future value). К тому же будущая ценность больше соответствует механизму формирования величины долга в накопительных схемах.

Под будущей ценностью денежного потока (x_t, $t = 1, \mathrm{K}\ , T$) понимается результат приведения его к последнему моменту времени, обычно — к моменту завершения финансовой операции. Взносу x_t, произведенному в момент t, соответствует сумма возврата $x_t\cdot(1+r)^{T-t}$, а потоку в целом —

$$FV = \sum_{t=1}^{T} x_t\cdot(1+r)^{T-t}.$$

Для рассмотренного выше процесса накопления условие равенства будущих ценностей имеет вид

$$\sum_{t=1}^{T} v_t\cdot(1+r)^{T-t} = W.$$

Нетрудно заметить, что оно равносильно условию равенства сегодняшних ценностей. Сегодняшняя ценность и будущая ценность любого потока связаны друг с другом соотношением

$$FV = PV\cdot(1+r)^{T},$$

так что если равны сегодняшние ценности двух потоков (в частности, любой поток может состоять из единственного платежа), то равны и их будущие ценности. Верно и обратное.

Можно высказать и более общее утверждение. Введем понятие ценности, приведенной к моменту b. Будем использовать обозначение RV_b для ценности потока, приведенной к моменту b. В этих обозначениях

$$RV_b = \sum_{t} x_t\cdot(1+r)^{b-t},$$

где суммирование распространяется на все значения t, для которых $x_t \neq 0$. Момент b — база приведения — может быть выбран произвольно; его выбор определяется соображениями удобства расчета и интерпретации его результатов. Начальная и будущая ценности являются частными случаями приведенной ценности, соответствующими различным базам: $PV = RV_0$, $FV = RV_T$. Переход от одной базы приведения к другой осуществляется в соответствии с равенством

$$RV_{b_1} = RV_{b_2} \cdot (1+r)^{b_1 - b_2}.$$

Вследствие этого если равны ценности двух потоков, приведенные к одной базе, то также равны их ценности, приведенные к любой другой базе.

В заключение снова займемся вычислениями.

Допустим, что вы решили купить телевизор, который стоит 4000 р., и хотите сравнить две схемы платежей.

Первая схема — покупка в рассрочку. Вы оплачиваете покупку пятью равными ежегодными взносами, первый из которых производится в момент покупки. Плату за кредит, как и в предыдущих примерах, примем равной 25 % годовых.

Так как первый платеж совпадает с моментом покупки, в данном случае размер платежа следует рассматривать как аннуитет пренумерандо; формула (1) соответствует аннуитету постнумерандо, и для нашего расчета ее нужно несколько изменить. Поскольку все платежи сдвигаются на один период вперед, не повторяя рассуждений, можно утверждать, что величина каждого платежа уменьшится в $(1+r)$ раз, так что

$$a = \frac{rV}{\left[1-(1+r)^{-T}\right] \cdot (1+r)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$a = \frac{0.25 \cdot 4000}{\left(1-1.25^{-5}\right) \cdot 1.25} = 1190 \text{ р.}$$

Общая сумма выплат равна $5 \cdot 1190 = 5950$ р.

Вторая схема — накопительная. Вы копите деньги в течение 5 лет, ежегодно вкладывая в банк равные суммы.

Величина ежегодного взноса определяется равенством (2):

$$v = \frac{0.25 \cdot 4000}{1.25^5 - 1} = 487 \text{ р.}$$

Сумма всех взносов равна $5 \cdot 487 = 2435$ р.

По отношению к моменту покупки все платежи по первой схеме производятся на 4 года позже, чем по второй. Поэтому в первом случае величина каждого платежа (а следовательно, и всей суммы) в $1.25^4 \approx 2.44$ раза больше, чем во втором.

XII. Дисконтирование в непрерывном времени

В лекциях 18 и 38 мы пользовались понятием сегодняшней ценности потока ожидаемых в будущем доходов. Поток доходов представлялся последовательностью уровней V_t, $t = 1, 2, \mathrm{K}, T$, где t — номер периода; V_t — доход, получаемый в течение t-го периода.

Величина сегодняшней ценности описывалась выражением

$$PV = \sum_{t=1}^{T} V_t \cdot (1+r)^{-t}. \qquad (1)$$

Здесь r — процентная ставка за один период.

При этом по существу использовалось предположение о том, что в каждом из периодов доход поступает одномоментно. Процентная ставка r соответствует промежутку времени продолжительностью в один период. Если считать, что «сегодня», т. е. момент, к которому приводятся будущие доходы, — это конец нулевого и начало первого периода, то момент поступления дохода V_1 — это конец первого периода, V_2 — конец второго и т. д. Таким образом, равенство (1) предполагает, что доход каждого периода поступает одномоментно в конце периода.

На практике выражения вида (1) для сегодняшней ценности применяются и в случаях, когда доход поступает более часто; при этом под V_t понимается весь доход, ожидаемый в течение t-го периода. Так как доход поступает частями в различные моменты периода, формула (1) при таком применении оказывается приближенной. Если процентная ставка за период невысока, то и погрешности будут невелики, но при больших значениях процентной ставки погрешностями уже нельзя пренебречь.

Другим приближением к действительности служит представление будущих доходов в виде *непрерывного* потока. При этом основной характеристикой потока является его *интенсивность* — доход в единицу времени. Если $V(t, t+\Delta t)$ — доход в течение промежутка времени $(t, t+\Delta t)$, то средняя интенсивность потока на этом промежутке равна $V(t, t+\Delta t)/\Delta t$. Мгновенное значение интенсивности потока в *момент* времени t можно определить как предел средней интенсивности для интервала, продолжительность которого стремится к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$