Аналогичные соотношения имеют место и для функции вида (5). Прологарифмировав обе части равенства (5), придем к выражению

$$\ln q = \ln A + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \ldots + \alpha_n \ln x_n.$$

Отсюда видно, что логарифм объема продукта $y = \ln q$ и логарифмы затрат ресурсов $z_i = \ln x_i$ связаны линейным соотношением

$$y = a + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n,$$

где $a = \ln A$. Это обстоятельство широко используется для оценки параметров функции Кобба—Дугласа по реальным данным: подбор параметров линейной функции представляет собой сравнительно несложную задачу. Эта задача становится особенно простой, если производственная функция имеет вид (4) и к тому же исследователь по тем или иным соображениям исходит из постоянства отдачи от масштаба. В этом случае $\alpha_L = 1 - \alpha_K$; разделив обе части равенства (4) на L, приходим к выражению

$$\frac{q}{L} = AL^{-\alpha_K} K^{\alpha_K} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha_K},$$

связывающему средний продукт труда с его фондовооруженностью. Эта связь описывается функцией с постоянной эластичностью, и численная оценка ее параметров по данным наблюдения может производится подобно тому, как это было сделано в разделе 2 лекции 7 при определении эластичности спроса.

VIII. Предельная выручка

Основные соотношения

Предельная выручка используется в качестве одного из основных средств анализа поведения фирм в условиях различных рыночных структур. Многие результаты, приведенные в 26-й и последующих лекциях, основываются на том, что фирма, стремящаяся к максимуму прибыли, выбирает такой объем производства, при котором выполняется равенство

$$MR = MC. \tag{1}$$

Заметим, что если TR и TC — непрерывно дифференцируемые функции объема производства, то равенство (1) является лишь необходимым условием максимума прибыли. Если при некотором объеме имеет место неравенство $MR > MC$, то небольшое увеличение объема выпуска позволит получить дополнительную выручку, превышающую дополнительные затраты, и прибыль фирмы возрастет. При $MR < MC$ ситуация будет противоположной. Поэтому значение Q_0 объема выпуска соответствует максимуму прибыли, если в окрестности Q_0 при $Q < Q_0$ имеет место неравенство $MR > MC$, а при $Q > Q_0$ оказывается, что $MR < < MC$. Именно это побудит фирму увеличить выпуск, если объем меньше Q_0, и уменьшить, если больше. На рис. 1 равенство (1) выполняется в трех точках; при этом Q_o и Q_2 соответствуют локальным максимумам, Q_1 — локальному минимуму прибыли. Вследствие различных особенностей формирования спроса на продукцию фирмы форма кривой MR, как мы увидим, может быть довольно причудливой и может допускать пересечения любых типов с кривой MC.

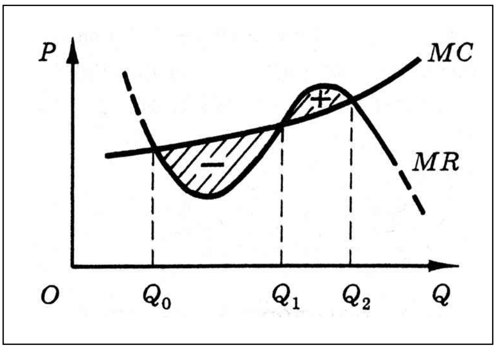

Рис. 1. Точки локальных максимумов (Q_0, Q_2) и локального минимума (Q_1) прибыли.

Поведение функции предельной выручки заслуживает специального рассмотрения.

Пусть функция $P = P_D(Q)$ описывает зависимость цены спроса на продукцию фирмы от предлагаемого объема. В лекции 26 выведено основное выражение для предельной выручки:

$$MR(Q) = P_D(Q) + Q P_D'(Q), \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование.

Если кривая спроса построена, то можно графически найти значение MR при любом объеме продукта. Возьмем точку A на кривой спроса (рис. 2). Точка B на кривой MR должна располагаться ниже точки A на величину $|Q_A P_D'(Q_A)|$. Но $P_D'(Q_A)$ — это угловой коэффициент наклона касательной AK к кривой спроса в точке A. Поэтому точку B можно найти, проведя через точку P_A прямую, параллельную касательной AK до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки A на ось абсцисс. Заметим, что $KABP_A$ — параллелограмм, и точку B можно было бы найти иначе, сместив точку А вниз на длину отрезка KP_A. Еще один спо-

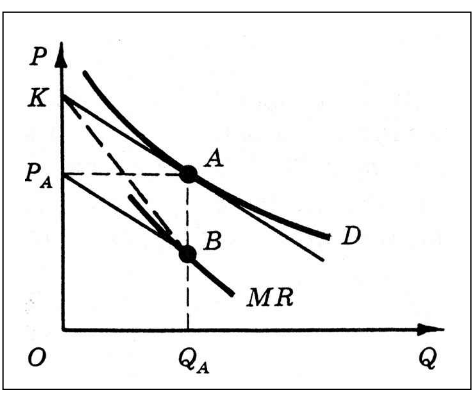

Рис. 2. Построение точки на кривой предельной выручки.

соб получим, воспользовавшись тем, что прямая BK, пересекаясь с отрезком $P_A A$, делит его пополам.

Последний способ построения позволяет отметить полезное свойство графика предельной выручки в случаях, когда спрос описывается линейной функцией. Так как касательная к прямой в любой ее точке — это та же самая прямая, линия предельной выручки — это прямая, проходящая через середины всех горизонтальных отрезков, показанных на рис. 3.

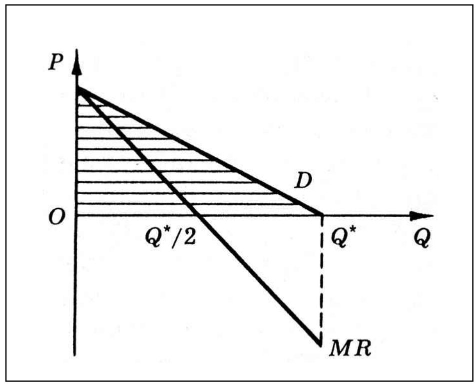

Рис. 3. Кривая предельной выручки в случае линейного спроса.

Рассматривая прибыль как функцию объема производства, $\Pi(Q)$, мы можем связать ее приращение с функциями $MR(Q)$ и $MC(Q)$. Так как

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = MR(Q) - MC(Q),$$

то при увеличении объема выпуска от Q_1 до Q_2 прибыль получает приращение

$$\Pi(Q_2) - \Pi(Q_1) = \int_{Q_1}^{Q_2} [MR(Q) - MC(Q)]dQ.$$

Графически это приращение прибыли выражается площадью между кривыми MR и MC над отрезком $[Q_1, Q_2]$, причем площадь считается положительной при $MR > MC$ и отрицательной при $MR < MC$.

Вернемся к рис. 1 и попытаемся выяснить, какой из локальных максимумов прибыли (Q_0 или Q_2) является абсолютным. Для этого нужно узнать, каким будет приращение прибыли — положительным или отрицательным — при переходе от Q_0 к Q_2. В случае, представленном на рис. 1, «отрицательная» площадь по абсолютной величине больше, чем «положительная», так что $\Pi(Q_0) > \Pi(Q_2)$. Следовательно, абсолютному максимуму прибыли соответствует объем Q_0.

Постоянная эластичность спроса

Помимо равенства (2) в лекции 26 приведено еще одно выражение для предельной выручки:

$$MR(Q) = P_D(Q)\left(1 - \frac{1}{\eta}\right), \tag{3}$$

где h — коэффициент эластичности спроса по цене. В общем случае эластичность спроса — переменная величина, она может изменяться от точки к точке.

Допустим однако, что спрос на некоторый товар обладает постоянной эластичностью во всем диапазоне изменений объемов и цен. В этом случае, как показывает равенство (3), при любом объеме предельная выручка отличается от цены спроса постоянным множителем $(1 - 1/h)$. Но этот множитель положителен лишь при высокой эластичности (рис. 4,*а*). При h = 1, а это имеет место, если $P_D(Q) = a/Q$, предельная выручка тождественно равна нулю (рис. 4,*б*). Такой вывод согласуется с тем, что в нашем случае общая выручка $TR = a$ — постоянная величина. Наконец, при низкой эластичности ($h < 1$) предельная выручка отрицательна для любых значений объема выпуска (рис. 4,*в*).

Если фирма-монополист встретится со спросом, имеющим единичную или низкую эластичность, то условие максимума прибыли не выполняется ни при каком объеме продукта: так как $MC > 0$, неравенство $MR < MC$ будет выполняться при любых объемах, и чем меньше Q, тем больше окажется прибыль фирмы (хотя при $Q = 0$ фирма не только не получит прибыли, но будет нести убытки в размере постоянных затрат!).

Парадоксальность ситуации связана с тем, что здесь использовано предположение о низкой эластичности спроса при сколь угодно высоких ценах. Но доход потребителя ограничен. Обозначая через q объем индивидуального спроса, через y — доход, мы можем утверждать, что индивидуальный спрос удовлетворяет неравенству Pq £ y. Сложив доходы всех потребителей, мы получим аналогичное неравенство, которому должен удовлетворять рыночный спрос:

$$PQ \text{ £ } Y.$$

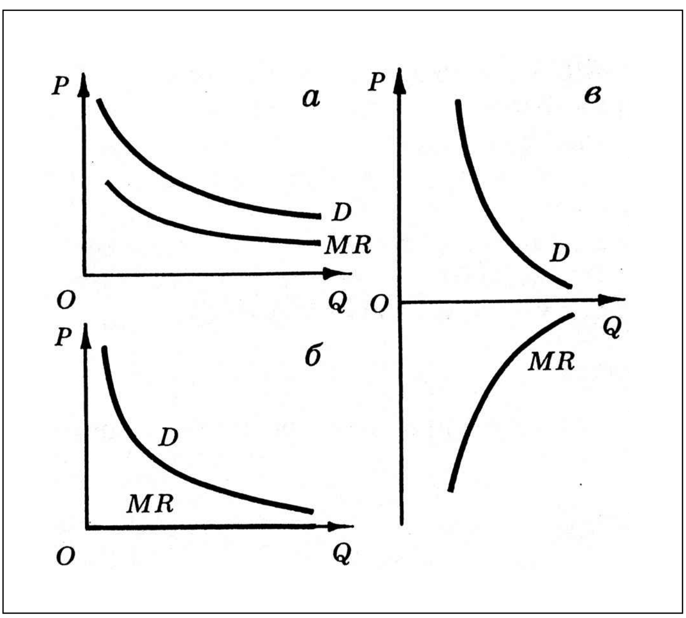

Рис. 4. Предельная выручка при постоянной эластичности спроса.
а – h = 2; *б* – h = 1; *в* – h = 0.5.

Здесь Q — объем рыночного спроса; Y — сумма доходов потребителей. Таким образом, кривая спроса должна располагаться ниже гиперболы $P = Y/Q$.

Однако если эластичность спроса постоянна и h < 1, то неравенство $PaP^{-\eta} \leq Y$ при больших P будет нарушено, каковы бы ни были постоянные a и Y. Следовательно, если цена превышает некоторый уровень, то спрос не может быть низкоэластичным. Отметим также, что если h > 1, то неравенство $PaP^{-\eta} \leq Y$, будет нарушаться при значениях P, близких к нулю, так что в этом диапазоне спрос не может быть высокоэластичным.

Можно высказать и более сильное утверждение. Так как фундаментальных потребностей у человека не так уж много, любой товар имеет какие-то заменители, пусть и не очень близкие. И если цена данного товара чрезмерно велика, потребитель от него откажется. Поэтому вполне реалистичным представляется допущение о существовании максимальной цены $P^* = P_D(0)$, так что $\eta \to \infty$ при Q ® 0. Как показывает равенство (2), при этом $MR(0) = P_D(0)$.

Изломы и другие особенности кривой спроса

На кривой спроса могут быть такие точки, в которых касательные, проведенные слева и справа, не совпадают (рис. 5). Такие точки называются точками излома кривой. Говорят также о точках излома функции, подразумевая под ними значения аргумента, при прохождении которых производная изменяется скачком.

Как показывает равенство (2), если при некотором значении Q кривая спроса имеет излом, то предельная выручка при этом значении Q претерпевает скачок, положительный или отрицательный — в зависимости от того, возрастает или убывает наклон касательной (с учетом знака!) при переходе через эту точку.

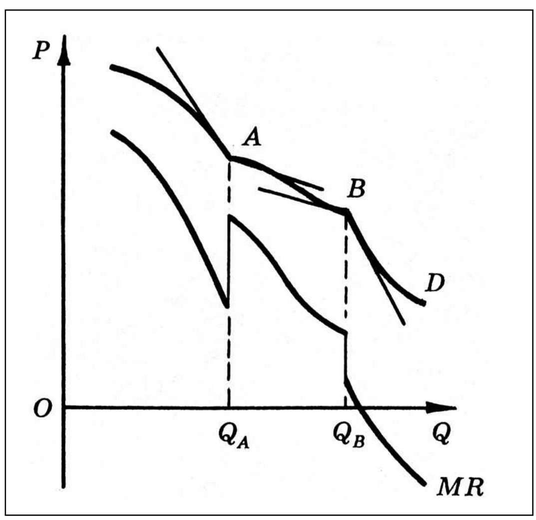

Рис. 5. Изломы на кривой спроса и скачки предельной выручки — положительный при $Q = Q_A$ и отрицательный при $Q = Q_B$.

Из кривых такого рода простейшими являются двухзвенные ломаные. Кривые MR на рис. 6 построены с использованием свойства, показанного на рис. 3: левый участок — это отрезок прямой, проведенной через точку P^* и середину отрезка P_AA; правый — отрезок прямой, проходящей через середины отрезков P_AA и OQ^*.

Ломаная кривая спроса, порождающая отрицательный скачок MR, представлена на рис. 6,*а*. Такая кривая спроса используется в одной из моделей олигополии и обсуждается в лекции 29. Если предельные затраты представлены кривой MC, то оптимальный объем равен Q_A. Правда, равенство (1), строго говоря, не выполняется, так как значение MR при $Q = Q_A$ не определено. Но слева от этой точки $MR > MC$, а справа $MR < MC$, откуда и следует оптимальность объема Q_A. Это значение объема останется оптимальным и при некотором увеличении или уменьшении предельных затрат (кривые MC_1 и MC_2).

Подобный характер спроса на продукцию фирмы имеет место и при монополистической конкуренции. Так как данная фирма и ее конкуренты производят товары — близкие заменители, то при повышении цены выше некоторого уровня (на рис. 6 это P_A) объем продаж резко сокращается. Такие фирмы также должны обнаруживать тяготение к объемам производства, соответствующим излому кривой спроса.

На рис. 6,*б* представлена противоположная ситуация. При положительном скачке MR может оказаться, что условия максимума прибыли выполняются при двух значениях объема выпуска, Q_1 и Q_2 (в точке Q_A прибыль имеет локальный минимум). Вопрос о том, какой из объемов, Q_1 или Q_2, соответствует глобальному максимуму, решается в зависимости от соотношения площадей заштрихованных треугольников; по существу он уже рассмотрен в первом разделе. На рис. 6,*б* кривая MC проведена так, что площади обоих треугольников одинаковы, так что объемы Q_1 и Q_2 приносят фирме одинаковую прибыль. Но если предельные затраты немного возрастут (кривая MC_1), то единственный оптимальный объем окажется несколько меньше Q_1, а если немного снизятся (кривая MC_2), то больше, чем Q_2.

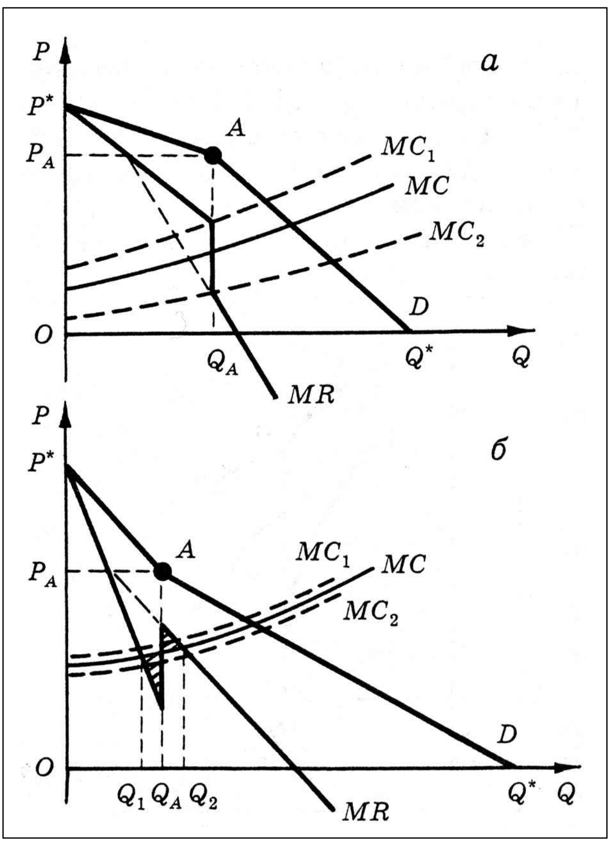

Рис. 6. Максимизация прибыли в случаях ломаной линии спроса.

Таким образом, при малых отклонениях предельных затрат от MC оптимум будет перескакивать от объема Q_1 к объему Q_2 — поведение фирмы будет неустойчивым.

Из других возможных особенностей спроса выделим так называемую горизонтальную площадку (см. лекцию 20). Если при некотором объеме спроса оказывается $P_D'(Q) = 0$, то, как показывает выражение (2), при этом объеме $MR(Q) = P_D(Q)$. На рис. 7 приведены кривая спроса, описывающаяся уравнением

$$P_D(Q) = 1 + (1 - Q)^3,$$

и соответствующая ей кривая предельной выручки. В качестве упражнения найдите аналитическое выражение и рассчитайте значения функции $MR(Q)$ для данного случая.

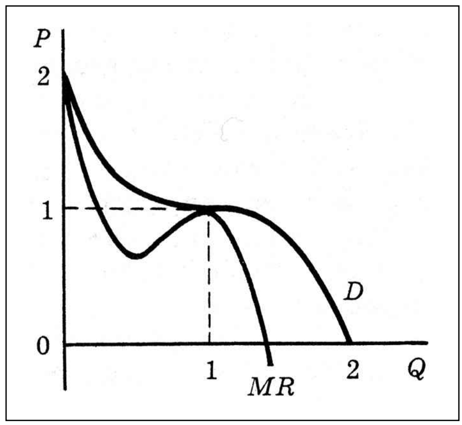

Рис. 7. Кривая спроса с «горизонтальной площадкой» и предельная выручка.

Наконец, поскольку теория допускает существование товаров Гиффена (см. лекцию 16), небезынтересно выяснить, как выглядит предельная выручка на рынке таких товаров.

Эффект Гиффена состоит в том, что на некотором участке кривая спроса имеет положительный наклон (рис. 8). Несмотря на «коленчатый» характер этой кривой, цена спроса определена однозначно: это максимальная цена, по которой может быть продан данный объем товара. На рисунке жирной линией выделена часть кривой спроса, являющаяся графиком функции $P_D(Q)$. При значении объема Q_A цена спроса имеет разрыв; предельная выручка стремится к –¥, если Q стремится к Q_A слева, а справа принимает конечное значение (на рисунке оно отрицательно, что согласуется с предположением о низкой эластичности спроса на соответствующем участке кривой).

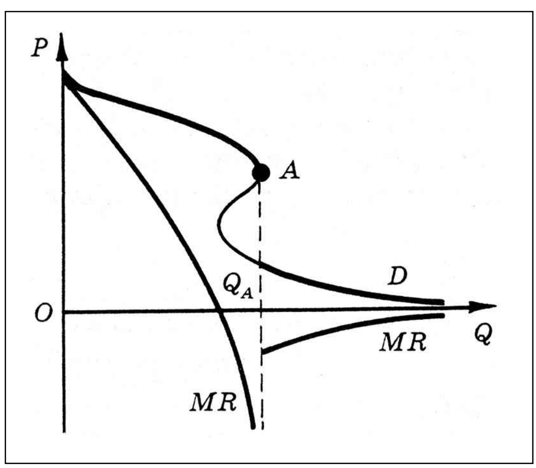

Рис. 8. Кривая спроса и предельная выручка в случае эффекта Гиффена.