$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} kx_n = k\lim_{n\to\infty} x_n = kx,$$

чем и исчерпывается доказательство.

2. Полученный результат может быть использован и при решении некоторых других функциональных уравнений, в частности, того, которое возникло в связи с условием согласованности во времени:

$$k(T_1 + T_2) = k(T_1)k(T_2), \qquad (2)$$

причем неизвестная функция здесь должна принимать положительные значения.

Почленно логарифмируя функциональное уравнение (2)

$$\ln k(T_1 + T_2) = \ln k(T_1) + \ln k(T_2),$$

мы убеждаемся в том, что функция $L(T) = \ln k(T)$ аддитивна:

$$L(T_1 + T_2) = L(T_1) + L(T_2),$$

и в силу только что доказанного свойства аддитивных функций $L(T) = = \mathrm{b}T$. Итак, мы видим, что $\ln k(T) = \mathrm{b}T$ и, следовательно, решением интересующего нас уравнения является

$$k(T) = e^{\beta T}.$$

Этот результат и был использован при построении функции роста.

VII. Математика производственных функций

Эластичность производственной функции и отдача от масштаба

В настоящем пункте мы несколько раз будем ссылаться на Математическое приложение II, которое для краткости будем обозначать МП II.

Как указывалось в лекции 22, предельный продукт некоторого ресурса характеризует *абсолютное* изменение выпуска продукта, приходящегося на единицу изменения расхода данного ресурса, причем изменения предполагаются малыми. Для производственной функции $q = = f(x_1, \ldots, x_n)$ предельный продукт i-того ресурса равен частной производной:

$$MP_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Влияние *относительного* изменения расхода i-го фактора на выпуск продукта, представленное также в *относительной* форме, характеризуется *частной эластичностью* выпуска по затратам этого продукта:

$$\mathrm{E}_{x_i}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f}$$

(см. МП II). Для простоты будем обозначать $\mathrm{E}_{x_i}[f] = e_i$. Частная эластичность производственной функции равна отношению предельного продукта данного ресурса к его среднему продукту.

Рассмотрим частный случай, когда эластичность производственной функции по некоторому аргументу — постоянная величина. Если по отношению к исходным значениям аргументов x_1, x_2, ..., x_n один из аргументов (i-тый) изменится в l раз, а остальные останутся на прежних уровнях, то изменение выпуска продукта описывается степенной функцией:

$$q = A\lambda^{e_i}$$

(см. МП II, формула (8) и упражнение 3). Полагая l = 1, найдем, что $A = f(x_1, \ldots, x_n)$, и поэтому

$$q = \lambda^{e_i} f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

В общем случае, когда эластичность — переменная величина, равенство (1) является приближенным при значениях l, близких к единице, т. е. при l = 1 + e, и тем более точным, чем ближе ϕ | к нулю.

Пусть теперь затраты всех ресурсов изменились пропорционально, т. е. затраты каждого изменились в l раз. Последовательно применяя только что описанный прием к x_1, x_2, ..., x_n, можно убедиться в том, что теперь

$$q \approx \lambda^{e_1} \lambda^{e_2} \cdot \ldots \cdot \lambda^{e_n} f(x_1, \ldots, x_n),$$

или

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \approx \lambda^{e_1 + e_2 + \ldots + e_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Сумма частных эластичностей некоторой функции по всем ее аргументам получила название *полной эластичности* функции. Вводя обозначение

$$E = \sum_i e_i$$

для полной эластичности производственной функции, мы можем представить полученный результат в виде

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \approx \lambda^E f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что полная эластичность производственной функции позволяет дать отдаче от масштаба числовое выражение. Пусть расход всех ресурсов немного увеличился с сохранением всех пропорций ($\lambda > 1$). Если $E > 1$, то выпуск продукции увеличился больше, чем в λ раз (возрастающая отдача от масштаба), а если $E < 1$, то меньше, чем в λ раз. При $E = 1$ выпуск продукции изменится в той же самой пропорции, что и затраты всех ресурсов (постоянная отдача).

Выделение *короткого* и *длительного* периодов при описании характеристик производства — грубая схематизация. Изменение объемов потребления различных ресурсов — энергии, материалов, рабочей силы, станков, зданий и т. д. — требует различного времени. Допустим, что ресурсы перенумерованы в порядке убывания подвижности: быстрее всего можно изменить x_1, затем x_2 и т. д., а изменение x_n требует наибольшего времени. Можно выделить сверхкороткий, или нулевой, период, когда не может измениться ни один фактор; 1-й период, когда изменяется только x_1; 2-й период, допускающий изменение x_1 и x_2 и т. д.; наконец, длительный, или n-й период, в течение которого могут измениться объемы всех ресурсов. Различных периодов, таким образом, оказывается $n + 1$.

Рассматривая некоторый промежуточный по величине, k-й период, мы можем говорить о соответствующей этому периоду отдаче от масштаба, имея в виду пропорциональное изменение объемов тех ресурсов, которые в этом периоде могут изменяться, т. е. x_1, x_2, ..., x_k. Объемы x_{k+1}, x_n, при этом сохраняют фиксированные значения. Соответствующий этому периоду показатель отдачи от масштаба равен

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_k.$$

Удлиняя период, мы добавляем к этой сумме следующие слагаемые, пока не получится значение E для длительного периода.

Поскольку производственная функция возрастает по каждому аргументу, все частные эластичности e_1 положительны. Отсюда следует, что чем продолжительнее период, тем больше отдача от масштаба.

Однородные производственные функции

Равенство (2) является приближенным при λ, близком к единице. Функции, для которых при любых λ и любых x_1, x_2,..., x_n выполняется равенство

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

получили название *однородных* функций, а величина α — *степени однородности*. Однородные функции 1-й степени называют линейно однородными. Ниже приведены примеры однородных функций; в квадратных скобках указаны степени однородности:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \qquad [1]; \qquad y = a_1\frac{x_1}{x_3} + a_2\frac{x_2}{x_3} \qquad [0];$$

$$y = a_1x_1^2 + a_2x_2x_3 \qquad [2];$$

$$y = a_1x_1^{0.2}x_2^{0.5} \qquad [0.7]; \qquad y = a_1\frac{x_1}{x_2x_3} + a_2\frac{x_2}{x_1x_3} \qquad [-1].$$

Функции $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ и $y = b_1x_1 + b_2x_2^2$ неоднородны.

Однородная функция степени a удовлетворяет *уравнению Эйлера:*

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = \alpha f. \qquad (3)$$

Разделив обе части уравнения Эйлера на f, получим

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f} = E = \alpha.$$

Таким образом, общая эластичность однородной функции — постоянная величина. При этом частные эластичности по каждому аргументу могут быть переменными.

Однородные функции обладают многими свойствами, делающими их весьма привлекательными для приближенного описания реальных производственных объектов.

Пропорциональному изменению всех аргументов геометрически соответствует движение вдоль луча, выходящего из начала координат. Возьмем две любые точки, лежащие на одной изокванте, скажем, A и B (рис. 1). Проведем из начала координат лучи через эти точки и отложим на них точки A' и B' так, чтобы каждый из отрезков OA' и OB' был в l раз длиннее соответствующего отрезка OA или OB. Если исходной изокванте соответствовало значение производственной функции q, то и точке A' то и точке B' соответствует одно и то же значение $\lambda^\alpha q$, так что точки A' и B' лежат на одной изокванте. Отсюда следует, что любая изокванта однородной производственной функции может быть получена из любой другой с помощью преобразования подобия (гомотетии) с центром в начале координат.

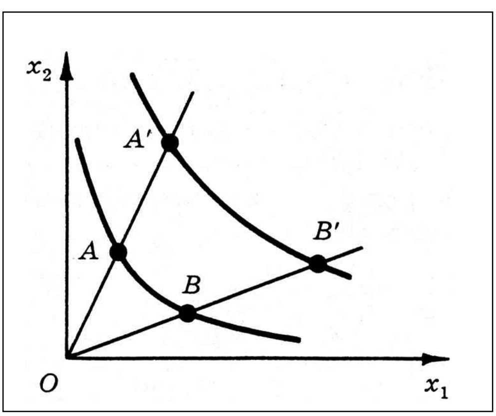

Рис. 1. Подобие изоквант однородной производственной функции.

Рассмотрим произвольную производственную функцию. Возьмем на различных изоквантах точки, в которых наклон изоквант один и тот же. Соединяющая эти точки линия называется *изоклиной* (от *греч.* klinw — наклонять). Иными словами, изоклина объединяет производственные варианты, характеризующиеся одинаковыми значениями предельной нормы технической замены ресурсов. Как отмечалось в разделе 2 лекции 22, линия оптимального роста фирмы характеризуется постоянством предельной нормы замены, которая во всех точках этой линии равна отношению цен ресурсов. Таким образом, линия роста — это одна из изоклин производственной функции. При изменении цен ресурсов фирма «перескакивает» с одной изоклины на другую.

Из подобия изоквант однородной функции следует, что в точках одного луча, выходящего из начала координат, все изокванты имеют один и тот же наклон. Таким образом, все изоклины однородной производственной функции (и, в частности, линия оптимального роста) — лучи, выходящие из начала координат (рис. 2,*б*).

Однородность производственной функции существенно упрощает анализ отдачи от масштаба. Прежде всего степень однородности характеризует влияние масштаба затрат ресурсов на выпуск продукции при любых изменениях масштаба (а не только при малых, как общая эластичность произвольной функции). Не менее важно и то обстоятельство, что изменение масштаба выпуска продукции в случае однородной производственной функции происходит путем пропорционального изменения расхода ресурсов, поскольку в этом случае такой характер изменения отвечает линии оптимального роста фирмы.

Функция Кобба—Дугласа

Трудно было бы ожидать, чтобы такой сложный объект, как производство, можно было описать функцией, имеющей простое аналитическое выражение. Однако для того чтобы производственную функцию можно было использовать не только для получения тех или иных теоретических утверждений, но и для выполнения конкретных расчетов, она должна иметь форму, допускающую количественную оценку. Как и в других областях знания, усилия ученых были направлены на отыскание таких функций, которые

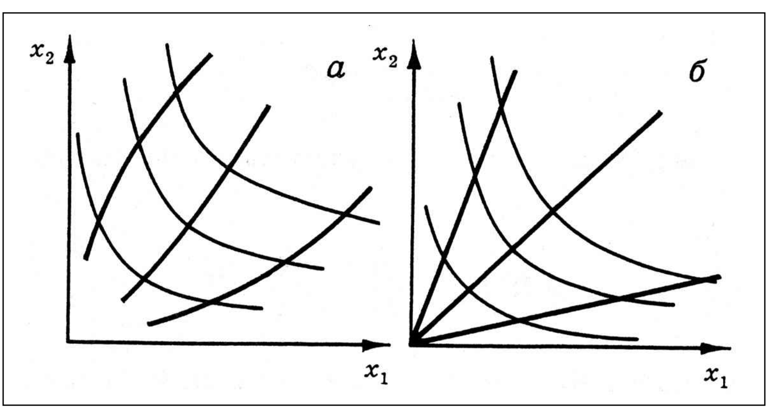

Рис. 2. Семейства изоклин производственных функций общего вида (*а*) и однородной (*б*).

позволили бы с достаточной точностью описать характеристики реальных производственных объектов и исследовать их свойства.

В 1928 г. К. У. Кобб и П. Х. Дуглас для описания зависимости объема продукции отрасли от затрат труда (L) и капитала (K) предложили следующую функцию:

$$q = AL^{\alpha_L}K^{\alpha_K}. \tag{4}$$

До настоящего времени функция Кобба—Дугласа наряду с некоторыми другими широко используется для приближения производственных функций различных объектов. В более общем случае функцией Кобба—Дугласа называют функцию

$$q = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{5}$$

Функция Кобба—Дугласа — степенная функция всех своих аргументов; ее частные эластичности e_i, постоянны и совпадают с параметрами α_i. Это однородная функция степени

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

так что сумма показателей степени в функциях (4) или (5) служит показателем отдачи от масштаба. Если отдача от масштаба постоянна, то эта сумма равна единице.

Дифференцируя функцию (4) по L, найдем предельный продукт труда:

$$MP_L = \alpha_L AL^{\alpha_L - 1}K^{\alpha_K} = \frac{\alpha_L q}{L}.$$

Аналогично получим выражение для предельного продукта капитала:

$$MP_K = \frac{\alpha_K q}{K}.$$

Отсюда следует выражение для предельной нормы замены труда капиталом:

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha_L}{\alpha_K} \cdot \frac{K}{L}.$$

Итак, если производство описывается функцией Кобба—Дугласа, то прирост капитала, замещающий единицу труда, пропорционален уже достигнутой фондовооруженности труда (отношению величины капитала к затратам труда).

Аналогичные соотношения имеют место и для функции вида (5). Прологарифмировав обе части равенства (5), придем к выражению

$$\ln q = \ln A + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \ldots + \alpha_n \ln x_n.$$

Отсюда видно, что логарифм объема продукта $y = \ln q$ и логарифмы затрат ресурсов $z_i = \ln x_i$ связаны линейным соотношением

$$y = a + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n,$$

где $a = \ln A$. Это обстоятельство широко используется для оценки параметров функции Кобба—Дугласа по реальным данным: подбор параметров линейной функции представляет собой сравнительно несложную задачу. Эта задача становится особенно простой, если производственная функция имеет вид (4) и к тому же исследователь по тем или иным соображениям исходит из постоянства отдачи от масштаба. В этом случае $\alpha_L = 1 - \alpha_K$; разделив обе части равенства (4) на L, приходим к выражению

$$\frac{q}{L} = AL^{-\alpha_K} K^{\alpha_K} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha_K},$$

связывающему средний продукт труда с его фондовооруженностью. Эта связь описывается функцией с постоянной эластичностью, и численная оценка ее параметров по данным наблюдения может производится подобно тому, как это было сделано в разделе 2 лекции 7 при определении эластичности спроса.

VIII. Предельная выручка

Основные соотношения

Предельная выручка используется в качестве одного из основных средств анализа поведения фирм в условиях различных рыночных структур. Многие результаты, приведенные в 26-й и последующих лекциях, основываются на том, что фирма, стремящаяся к максимуму прибыли, выбирает такой объем производства, при котором выполняется равенство

$$MR = MC. \tag{1}$$

Заметим, что если TR и TC — непрерывно дифференцируемые функции объема производства, то равенство (1) является лишь необходимым условием максимума прибыли. Если при некотором объеме