одного вида, а взятые в некотором количестве наборы V — как благо второго вида; назовем их «комплектное благо 1» и «комплектное благо 2». Теперь обсуждаемое допущение можно сформулировать следующим образом: при замене любого комплектного блага любым другим норма замещения убывает с увеличением объема замещаемого блага.

Рассмотрим множество Ω наборов, включающих только комплектные блага 1 и 2 в произвольных количествах. Все такие наборы имеют вид $X = \beta_1 U + \beta_2 V$, где β_1 и β_2, — неотрицательные числа, выражающие количества комплектных благ. Отрезок UV состоит из точек вида (1 − а)U + аV, причем а ³ 0 и 1 − а ³ 0, так что отрезок UV целиком содержится в множестве Ω. Но множество Ω — это двухпродуктовое пространство, в котором существуют только комплектные блага 1 и 2. А мы уже знаем, что в двухпродуктовом пространстве закон убывающей предельной полезности имеет своим следствием тот факт, что наихудшая точка любого отрезка лежит на его конце.

Возьмем теперь в пространстве благ какую-либо поверхность безразличия и точку C на ней. Пусть U ф C и V ф C, а точка X расположена на отрезке UV. Тогда обязательно имеет место отношение X ф C — ведь наихудшая точка отрезка UV — это U или V.

Таким образом, если U и V принадлежат множеству точек, не уступающих точкам данной поверхности безразличия, то и весь отрезок UV также принадлежит этому множеству. А это означает, что закон убывающей предельной полезности в пространстве благ любой размерности «выглядит» точно так же, как и в пространстве двух благ: множество наборов, не менее предпочтительных, чем лежащие на данной поверхности безразличия, выпукло.

V. Задача Лагранжа

Безусловный и условный экстремумы

Важное место в математическом аппарате экономики занимают оптимизационные задачи — задачи, в которых ищется наилучшее в определенном смысле решение. В экономической практике требуется использовать имеющиеся ресурсы наиболее выгодным образом. В экономической теории одним из отправных пунктов является постулат о том, что каждый экономический субъект, имея определенную свободу выбора своего поведения, отыскивает наилучший со своей точки зрения вариант. И оптимизационные задачи служат средством описания поведения экономических субъектов, инструментом исследования закономерностей этого поведения.

Многие задачи оптимизации формулируются следующим образом. Решение, которое должен принять субъект, описывается набором чисел

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ (или точкой $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n-мерного пространства). Достоинства того или иного решения определяются значениями функции $f(X) = \mathrm{f}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — *целевой функции*. Наилучшее решение — это такая точка X, в которой функция $f(X)$ принимает наибольшее значение. Задача нахождения такой точки описывается следующим образом:

$f(X)$ ® max.

Если функция $f(X)$ характеризует отрицательные стороны решения (ущерб, убытки и т. п.), то ищется точка X, в которой значение $f(X)$ минимально:

$f(X)$ ® min.

Минимум и максимум объединяются понятием экстремума. Для определенности мы в этой статье будем говорить только о задачах максимизации. Поиск минимума не требует специального рассмотрения, поскольку заменой целевой функции $f(X)$ на $-f(X)$ всегда можно «превратить недостатки в достоинства» и свести минимизацию к максимизации.

Из каких вариантов должен быть выбран наилучший? Иными словами, среди каких точек пространства нужно искать оптимум? Ответ на этот вопрос связан с таким элементом оптимизационной задачи, как *множество допустимых решений*. В некоторых задачах допустимыми являются любые комбинации чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$, т. е. множество допустимых решений — это все рассматриваемое пространство.

В других задачах следует принимать во внимание различные *ограничения*, означающие, что не все точки пространства доступны при выборе. В содержательных постановках задач это может быть связано, например, с ограниченностью располагаемого количества ресурсов.

Ограничения могут быть представлены в форме равенств вида

$$g(X) = 0$$

или неравенства

$g(X)$ ³ 0.

Если условия имеют несколько другую форму, скажем, $g_1(X) = g_2(X)$ или $g(X)$ £ A, то их можно привести к стандартному виду, перенеся все функции и константы в одну из частей равенства или неравенства.

Экстремум, отыскиваемый во всем пространстве, без каких-либо ограничивающих условий, носит название *безусловного*. Если целевая функция непрерывно дифференцируема, то, как известно из общего курса математического анализа, необходимое условие безусловного экстремума функции состоит в равенстве нулю всех ее частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,\ldots,n \qquad (1)$$

(для упрощения записи мы иногда будем опускать обозначения аргументов).

Если же заданы ограничения, то экстремум ищется лишь среди точек, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи, так как только такие точки являются допустимыми. В этом случае экстремум носит название *условного*.

Чрезвычайно полезным средством экономического анализа оказалась задача поиска условного экстремума:

$$f(X) \text{ ® } \max \tag{2}$$

при условиях

$$g_1(X) = 0;\ g_2(X) = 0;\ \ldots g_n(X) = 0,$$

все ограничения которой представляют собой равенства.

Если при этом целевая функция и все ограничивающие функции непрерывно дифференцируемы, то такую задачу мы будем называть *задачей Лагранжа*.

Задача Лагранжа с одним ограничением

В настоящем пункте будет рассмотрена задача, имеющая следующую структуру:

$$f(X) \text{ ® } \max \tag{3}$$

при условии

$$g(X) = 0.$$

Для иллюстрации некоторые авторы приводят такой пример. По склону горы идет дорога, требуется найти на ней самую высокую точку. На рис. 1 представлена карта местности с нанесенными на нее линиями равных высот; синяя линия — это дорога. Точка M, в которой дорога касается одной из линий уровня, — это и есть наивысшая точка дороги.

Если $X = (x_1, x_2)$ — точка плоскости, x_1 и x_2 — ее координаты, то задаче можно придать следующую форму. Пусть $f(X)$ — высота точки X над уровнем моря, а уравнение $g(X) = 0$ описывает дорогу. Тогда наивысшая точка дороги — решение задачи (3).

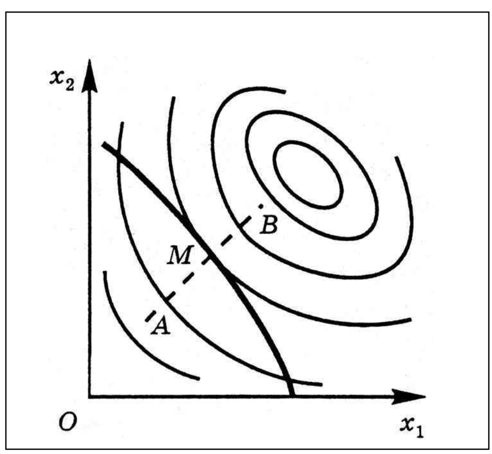

Рис. 1. Задача о дороге на склоне

Если бы дорога проходила через вершину горы, то ее высшая точка была бы самой высокой точкой местности, и ограничение можно было бы не принимать во внимание.

Если же дорога не проходит через вершину, то, немного уклонившись от дороги, можно было бы подняться выше, чем двигаясь строго по дороге. Отклонение от дороги соответствует попаданию в такие точки, где $g(X) \neq 0$; при малых отклонениях достижимую при этом высоту можно приближенно считать пропорциональной отклонению.

Рис. 2. Разрез горы по *AB*.

Идею решения задачи Лагранжа можно представить следующим образом: можно попытаться «исправить» рельеф местности так, чтобы отклонение от дороги не давало преимуществ в достижении высоты. Для этого нужно заменить высоту $f(X)$ функцией

$$L(X) = f(X) - \lambda g(X),$$

где множитель λ подбирается таким образом, чтобы участок склона в окрестности точки M стал горизонтальным (слишком малое значение λ не устранит преимуществ отклонений от дороги, а слишком большое — придаст преимущества отклонениям в противоположную сторону).

Теперь, поскольку рельеф $L(X)$ делает площадку в окрестности точки оптимума горизонтальной, эта точка удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,$$

а так как точка лежит на дороге, то — и ограничению $g(X) = 0$.

Пример с горой и дорогой — лишь иллюстрация идеи; точно так же двумерный случай использован исключительно для наглядности. Подобным образом можно было бы рассуждать и в общем, n-мерном случае.

Справедливо следующее утверждение:

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,\ldots,x_n)$ —непрерывно дифференцируемые функции всех своих аргументов, то решение задачи

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max$$

при условии

$$g(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \; i = 1,\ldots,n; \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \tag{5}$$

где

$$L(x_1,\ldots,x_n;\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda g(x_1,\ldots,x_n).$$

Функция $L(X;$ l) получила название *функции Лагранжа* (или *лагранжиана*) задачи (3), а коэффициент l — *множителя Лагранжа*.

Заметим, что равенство (5) — это представленное в другой форме ограничение $g(X) = 0$.

Приведенные выше рассуждения, разумеется, не являются доказательством сформулированного здесь утверждения; они лишь помогают понять существо метода: составляющая l$g(X)$ в составе функции Лагранжа должна уравновешивать возможное увеличение максимального значения функции $f(X)$ при малом отклонении (на единицу) значений функции $g(X)$ от нуля. Это обстоятельство в дальнейшем будет весьма полезно при обсуждении смысла множителя Лагранжа.

Рассмотрим чрезвычайно простой пример. Веревкой длины A требуется огородить на берегу моря прямоугольный участок наибольшей площади (берег считается прямолинейным).

Это один из вариантов так называемой задачи Дидоны. Дидона, сестра тирского царя, — легендарная основательница и первая властительница Карфагена. Покинув родину и прибыв в Северную Африку, она купила у местных жителей прибрежный участок, который, по условию, можно огородить воловьей шкурой. Разрезав шкуру на тонкие ремешки, она связала из них тонкую веревку. Остальное — геометрическая задача: огородить участок наибольшей возможной площади.

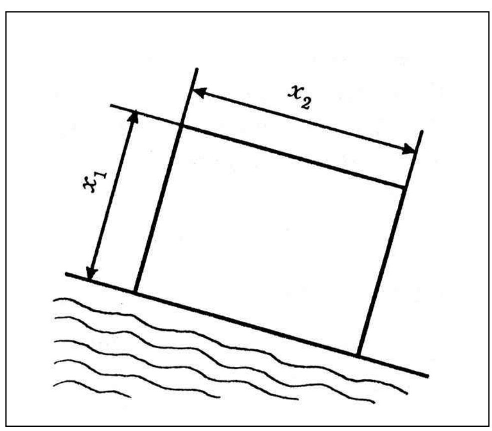

Рис. 3. К задаче Дидоны.

Обозначим стороны прямоугольника x_1 и x_2 (рис. 3). Решим сначала задачу без использования метода Лагранжа.

Очевидно, $x_2 = A - 2x_1$, и площадь прямоугольника равна $S = x_1x_2 = x_1(A - 2x_1)$. Рассматривая ее как функцию одного аргумента x_1, нетрудно найти его значение, при котором площадь максимальна: $x_1 = A/4$. Отсюда $x_2 = A/2$. Максимальная площадь равна $S^* = A^2/8$.

Теперь рассмотрим эту же задачу в форме задачи Лагранжа:

$$x_1x_2 \text{ ® } \max$$

при условии

$$2x_1 + x_2 - A = 0.$$

Лагранжиан этой задачи равен

$$L(x_1,x_2;\text{l}) = x_1x_2 — \text{l}(2x_1 + x_2 - A),$$

и условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda = 0,$$

так что

$$x_2 = 2\text{l},$$
$$x_1 = \text{l},$$
$$2x_1 + x_2 = A.$$

Подставляя значения x_1 и x_2 из первого и второго равенств в третье, находим, что $4\text{l} = A$, откуда

$$\text{l} = A/4; \quad x_1 = A/4; \quad x_2 = A/2,$$

как и при решении первым способом.

Этот пример показывает распространенный способ решения задачи Лагранжа. Соотношения (4) и (5) образуют систему уравнений относительно x_1,..., x_n и l. Система состоит из $n + 1$ уравнения — n уравнений вида (4) и одно уравнение вида (5). Число уравнений равно числу неизвестных. Из уравнений вида (4) можно попытаться выразить каждую из неизвестных $x_1,...,x_n$ через l, т. е. решить ее как систему из n уравнений, рассматривая l как параметр. Подставляя получившиеся выражения в уравнение (5) — напомним, что оно совпадает с ограничением, — получаем уравнение относительно l. Решая его, находят l, после чего определяются исходные неизвестные $x_1,...,x_n$.

Смысл множителей Лагранжа

При решении задачи Лагранжа мы интересовались значениями $x_1,...,x_n$; кроме того, нас могло интересовать экстремальное значение целевой функции $f(X)$. Но в процессе решения попутно было определено значение еще одной величины — множителя Лагранжа.

Оказывается, множитель Лагранжа — весьма существенная характеристика решаемой задачи. Чтобы смысл ее стал яснее, несколько изменим формулировку ограничения, ничего не изменяя по существу.

Типичная экономическая ситуация характеризуется тем, что приходится искать наиболее выгодное решение при ограниченном количестве некоторого ресурса. Если r — заданное количество ресурса, а функция $h(X)$ характеризует потребное его количество для достижения точки X, то ограничению естественно придать форму

$$h(X)\ £\ r.$$

По характеру задачи часто бывает ясно, что для достижения оптимума ресурс нужно использовать полностью, так что ограничение может быть записано в виде равенства

$$h(X) = r. \tag{6}$$

Формально это условие можно представить в стандартной форме $g(X) = = h(X) - r = 0$. Но значительный интерес представляет максимально достижимый уровень функции $f(X)$ в зависимости от имеющегося количества ресурса r. Обозначим

$$F(r) = \max\{f(X) \mid h(X)=r\}.$$

В правой части — принятое обозначение условного экстремума: после вертикальной черты выписывается условие.

Вспомним, что при обсуждении структуры лагранжиана мы интерпретировали l$g(X)$ как составляющую, уравновешивающую возможный прирост максимума $f(X)$ при отклонении $g(X)$ от нуля. Но отклонение $g(X)$ от нуля есть отклонение $h(X)$ от r. Если располагаемое количество ресурса получает приращение Δr, то мы должны ожидать приращение максимума функции $f(X)$ на lΔr.

В действительности это соотношение носит приближенный характер. Точный результат мы получили бы в пределе при $\Delta r \to 0$:

$$\frac{dF(r)}{dr} = \lambda. \tag{7}$$

Таким образом, множитель Лагранжа характеризует скорость изменения максимума целевой функции при изменении ограничивающей константы r в ограничении вида (6).

В рассмотренном в предыдущем пункте варианте задачи Дидоны ограниченным ресурсом была длина веревки A. Максимальная площадь оказалось равной $S(A) = A^2/8$. Отсюда $dS(A)/dA = A/4$:, что в точности соответствует найденному при решении значению l.

Приведем еще одно рассуждение в пользу такой трактовки множителя Лагранжа. Для всевозможных точек X найдем значения $f(X)$ и $h(X)$ и отложим эти значения в виде точек в декартовых

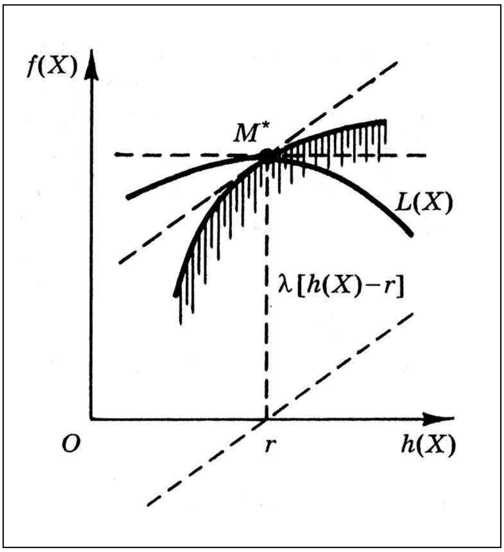

Рис. 4. К интерпретации множителя Лагранжа.

координатах (рис. 4). Если при каждом значении $h(X)$ существует максимум функции $f(X)$, то все точки расположатся ниже некоторой кривой, показанной на рисунке жирной линией.

Нас интересуют точки, соответствующие условию $h(X) = r$. Максимум $f(X)$ помечен точкой M^*; обозначим l наклон кривой в этой точке. Если в качестве ординаты брать не $f(X)$, а $L(X;$ l$) = f(X) - -$ l$[h(\mathrm{X}) - r]$, то новая верхняя граница (синяя кривая) имела бы в точке M^* горизонтальную касательную. Это значит, что в исходном n-мерном пространстве соответствующая точка M — стационарная точка функции $L(X;$ l$)$ с данным значением параметра X. Таким образом, l — множитель Лагранжа.

Но жирная черная кривая — это график функции $F(r)$, а l — его угловой коэффициент, откуда и следует равенство (7).

Рацион Робинзона

Обратимся теперь к задаче о потреблении примерно в таком виде, в каком ее ставил Госсен.

Человек может потреблять блага n видов в количествах x_i, $i = 1,\ldots,n$. Общая полезность потребления i-того блага описывается функцией $TU_i(x_i)$. Предельная полезность $MU_i(x_i) = dTU_i\ (x_i)/dx_i$ убывает с ростом x_i — в этом состоит закон Госсена. Полезность потребления всех благ суммируется по отдельным благам, так что

$$TU(X) = \sum_i TU_i(x_i).$$

Будем считать, опять-таки следуя Госсену, что потребительские возможности человека ограничены лишь временем, которое он может затрачивать на добывание и потребление благ, как это имело место у Робинзона Крузо. Если на единицу i-того блага ему приходится тратить t_i единиц времени, то ресурсное ограничение выражается равенством

$$\sum_i t_i x_i = T, \tag{8}$$

где T — фонд времени, выделяемый на потребление благ.

Задача рационального потребления теперь сводится к определению такого «рациона» — набора благ $X = (x_1,\dots,x_i)$, —который доставляет максимум $TU(X)$ при ограничении (8).

Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda) = \sum_i TU_i(x_i) - \lambda\left[\sum_i t_i x_i - T\right].$$

Условия оптимума выражаются системой

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = MU_i(x_i) - \lambda t_i = 0, \quad i = 1,\dots n,$$

или

$$MU_i(x_i) = \text{l}\, t_i, \quad i = 1,\dots,n. \tag{9}$$

Итак, предельные полезности различных благ в точке оптимума пропорциональны удельным затратам времени. Это значит, что для любой пары благ (i,j) отношение их предельных полезностей равно отношению удельных затрат времени:

$$\frac{MU_i(x_i)}{MU_j(x_j)} = \frac{t_i}{t_j}.$$

А отсюда следует, что дополнительная малая порция времени (скажем, минута), затрачиваемая на любое из благ, дает один и тот же прирост полезности.

Величина этого прироста, как это следует из результата предыдущего пункта, определяется коэффициентом l: если Робинзон сможет выделить на потребление благ дополнительно ΔT единиц времени, то общая полезность возрастет при этом на величину

$$\Delta TU \approx \lambda\Delta T. \tag{10}$$

Заметим, что убывание предельной полезности гарантирует единственность оптимума. Если взять другие значения x_i (обозначим их x_i'), также удовлетворяющие условиям пропорциональности предельных полезностей удельным затратам времени:

$$MU_i(x_i') = \lambda_i' t_i,$$

то либо $\lambda' > \lambda$, и тогда $x_i' < x_i$ для всех продуктов (предельная полезность убывает с ростом x_i); либо $\lambda' < \lambda$ — и тогда $x_i' > x_i$ для всех *i*. В первом случае потребное количество времени меньше T, во втором — больше, но ни в одном из них ограничение не будет выполнено.

Таблица 1

Данные к задаче о рационе Робинзона

i	a_i	t_i
1	50	1
2	100	2
3	50	2

Попутно отметим следующее обстоятельство. Система уравнений (9) определяет наилучший набор благ при любом фиксированном количестве T выделенного времени; с величиной T связано лишь численное значение l. Считая величину T переменной, введем как в предыдущем пункте, функцию

$$F(T) = \max\left\{TU(X) \middle| \sum_i t_i x_i = T\right\},$$

которую можно трактовать как общую полезность времени. Это — «вторичная» полезность: ее величина определяется максимальной полезностью набора благ, достижимой при данном количестве выделенного времени. Точный смысл приближенного равенства (10) состоит в том, что

$$\frac{dF(T)}{dT} = \lambda,$$

т. е. l — предельная полезность времени для Робинзона.

Как мы только что видели, сравнивая l и λ' для различных наборов благ, чем больше T, тем меньше l, Поскольку природа выделяемого ресурса несущественна, мы можем сделать следующий общий вывод:

если предельная полезность каждого блага снижается с ростом объема его потребления, а затраты ресурса пропорциональны объему, то предельная полезность ресурса падает с увеличением количества используемого ресурса.

Проиллюстрируем эти результаты числовым примером. Допустим, что Робинзон потребляет 3 вида благ, причем все частные функции полезности имеют один и тот же вид

$$TU_i(x_i) = a_i \ln(x_i + 1)$$

с различными коэффициентами a_i. Он может выделить на потребление 15 ч в сутки; остальные данные приведены в табл. 1. Воспользуемся системой (9):

$$MU_i(x_i) = \frac{a_i}{x_i + 1} = \lambda t_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda t_i} - 1.$$

Подставим числовые значения известных параметров:

$$x_1 = \frac{50}{\lambda \cdot 1} - 1 = \frac{50}{\lambda} - 1;$$

$$x_2 = \frac{100}{\lambda \cdot 2} - 1 = \frac{50}{\lambda} - 1;$$

$$x_3 = \frac{50}{\lambda \cdot 2} - 1 = \frac{25}{\lambda} - 1.$$

Используем теперь ресурсное ограничение:

$$1 \cdot \left(\frac{50}{\lambda} - 1\right) + 2 \cdot \left(\frac{50}{\lambda} - 1\right) + 2 \cdot \left(\frac{25}{\lambda} - 1\right) = \frac{200}{\lambda} - 5 = 15,$$

откуда $l = 200/(15+5) = 10$. Теперь найдем количество каждого блага:

$$x_1 = \frac{50}{10} - 1 = 4; \; x_2 = \frac{50}{10} - 1 = 4; \; x_3 = \frac{25}{10} - 1 = 1.5.$$

Остальные результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов в задаче о рационе Робинзона

i	x_i	$t_i x_i$	TU_i
1	4	4	80.5
2	4	8	160.9
3	1.5	3	45.8
Σ		15	287.2

Вооружитесь микрокалькулятором и попробуйте построить другой набор, также требующий 15 ч. Убедитесь, что общая полезность будет меньше, чем 287.2 (или, в пределах точности расчета, — такая же).

Теперь замените $T = 15$ на $T = 16$ и повторите все расчеты. Полученное ранее значение $l = 10$ говорит о том, что теперь полезность наилучшего набора возросла на 10 ед. Расчет дает значение приращения 9.8. Новому, большему значению T соответствует уменьшившееся значение $l = 9.52$.

Взаимные экстремальные задачи

Задачу Лагранжа с одним ограничением можно было бы записать в следующей форме:

$$f(X) - c \text{ ® } \max$$

при условии (11)

$$h(X) = r.$$

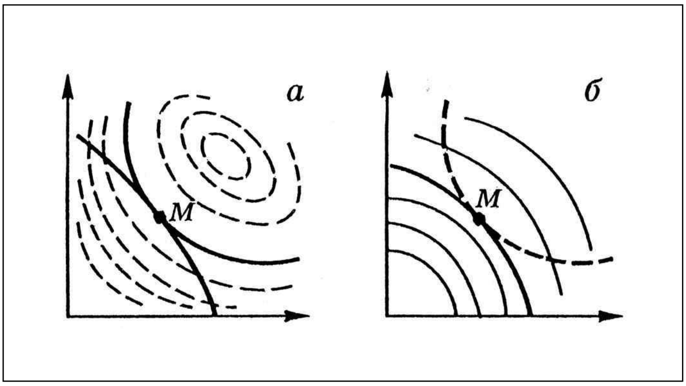

Рис. 5. Пара взаимных задач.
Черным показаны линии уровня функции $f(X)$, *синим* — функции $h(X)$.

Вычитание константы c из целевой функции не изменяет положения оптимума. Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda) = f(X) - c - \lambda[h(X) - r],$$

а условия оптимума имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь задачу, в которой целевая и ограничивающая функции поменялись ролями:

$$h(X) - r \text{ ® } \min$$

при условии **(13)**

$$f(X) = c.$$

Для новой задачи лагранжиан равен

$$L_1(X;\mu) = h(X) - r - \mu[f(X) - c],$$

а условие оптимальности —

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

Задачи (11) и (13) называют взаимными по отношению друг к другу. Если, например, исходная задача состояла в максимизации полезности некоторого набора продуктов при заданном ресурсном ограничении, то взаимная задача состоит в минимизации расхода ресурса при обеспечении заданного уровня полезности.

Сравнение равенств (12) и (14) показывает, что условия оптимальности у обеих задач одни и те же: достаточно положить $\mu = 1/\lambda$ чтобы в этом убедиться. Если λ — предельная полезность ресурса, то μ можно было бы назвать «предельной ресурсоемкостью полезности».

Модель потребительского выбора

Перейдем к рассмотрению рационального потребительского выбора в пространстве благ с теми же отношениями предпочтения, о которых говорилось в лекции 13 и Математическом приложении IV.

Введем в рассмотрение функцию полезности $u(X)$, согласованную с предпочтениями данного потребителя: $u(X) > u(y)$ тогда и только тогда, когда $X \succ Y$. Функцию $u(X)$ будем считать непрерывно дифференцируемой.

При этих допущениях моделью потребительского оптимума служит задача Лагранжа

$$u(X) \to \max$$

при условии

$$\sum_i p_i x_i = m,$$

где p_i — цена i-того блага, а m — денежный доход потребителя. Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Введем для удобства обозначение $u_i = \partial u / \partial x_i$ и представим условия оптимальности в форме

$$u_i = \lambda p_i. \qquad (15)$$

Формально эта система похожа на систему (9), описывающую оптимальность в задаче о рационе Робинзона. Но здесь имеются и существенные отличия. Во-первых, теперь мы отказались от предположения о суммируемости полезностей различных благ, и u_i — не производные полезностей отдельных благ, а лишь частные производные общей функции полезности. Во-вторых, $u(X)$ — это не полезность в некоторой абсолютной количественной шкале, а лишь функция, согласованная с предпочтениями и отражающая только порядковые отношения. Тем не менее перечень аналогичных свойств можно продолжить. Для любой пары благ (i,f) в точке оптимума должны выполняться соотношения

$$\frac{u_i}{u_j} = \frac{p_i}{p_j}. \qquad (16)$$

Отметим, что выражение в левой части — это норма замещения i-того блага j-тым при постоянстве объемов всех остальных благ: в пределах поверхности безразличия должно выполняться равенство

$$\Delta u \approx u_i \Delta x_i + u_j \Delta x_j = 0,$$

то есть

$$\frac{u_i}{u_j} = -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}.$$

Как мы уже выяснили, значение множителя Лагранжа должно выражать предельную полезность лимитирующего ресурса, в данном случае — денежного дохода (или, проще, — предельную полезность денег). Но поскольку значения функции $u(X)$ не являются абсолютными значениями полезности, постольку и полная полезность денег

$$U(m) = \max\left\{u(X) \mid \sum_i p_i x_i = m\right\}$$

имеет смысл лишь по отношению к выбранной шкале полезностей. То же относится и к предельной полезности денег.

Что произойдет, если функцию полезности $u(X)$ заменить равносильной ей функцией $u^*(X)$? Отношение предпочтения сохранится, если $u^*(X) = j(u(X))$, где $j(u)$ — монотонно возрастающая функция. Правило дифференцирования сложной функция позволяет утверждать, что

$$u_i^*(X) = \frac{\partial u^*(X)}{\partial x_i} = \varphi'(u) u_i(X),$$

где $\varphi'(u)$ — значение производной $d\varphi(u)/du$. Заметим, что множитель $\varphi'(u)$ является одним и тем же для всех благ. Поэтому условия оптимальности

$$u_i(X) = \lambda p_i,$$

$$u_i^*(X) = \lambda^* p_i$$

определяют одно и то же положение потребительского оптимума в пространстве благ. Различаются лишь значения множителей Лагранжа:

$$\lambda^* = \varphi'(u)\lambda. \tag{17}$$

К этому результату можно подойти с другой стороны. Задавшись некоторым значением m дохода, при использовании функций $u(X)$ и $u^*(X)$ мы получим один и тот же оптимальный набор благ

X_0 Общая полезность денег в одной шкале примет значение $U(m) = u(X_0)$, в другой — $U^*(m) = u^*(X_0) = j\,(u(X_0))$. Таким образом, при любом уровне дохода

$$U^*(m) = j(U(m)), \tag{18}$$

то есть общие полезности дохода в разных шкалах связаны между собой точно так же, как и полезности наборов благ. А так как множитель Лагранжа в рассматриваемой задаче — это предельная полезность денежного дохода, то, применяя к равенству (18) правило дифференцирования сложной функции, мы снова придем к равенству (17).

Нельзя ли выбрать такую функцию полезности $u^*(X)$, чтобы полезность дохода равнялась величине дохода, т. е. $U^*(m) = m$? Можно. Если нам удалось, взяв какую-либо из функций полезности благ $u(X)$, получить функцию полезности дохода $U(m)$, то теперь нам остается определить функцию j из условия $j(U(m)) = m$, т. е. функция j должна быть обратной по отношению к $U(m)$. Так как $U(m)$ —возрастающая функция (почему?), функция j оказывается также возрастающей, и $u^*(X) = j\,(u(X))$ является функцией полезности. Для этой функции $l^* = 1$ при любом уровне дохода, а условия оптимальности имеют особенно простой вид $u_i = p_i$.

Постарайтесь ответить на следующие вопросы.

1. Можно ли утверждать, что построенная таким образом функция полезности $u^*(X)$ «лучше» любых других и может служить для количественного измерения полезности? Прежде чем отвечать на этот вопрос, выясните, сохранятся ли эти хорошие свойства функции $u^*(X)$ при изменении цен.

2. Верно ли, что с увеличением дохода предельная полезность денег убывает? Нельзя ли подобрать такую функцию полезности благ, чтобы предельная полезность дохода росла вместе с доходом?

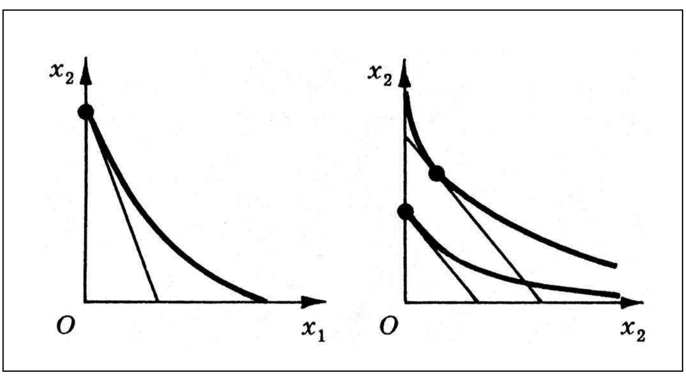

Рис. 6. При одном значении дохода решение оказывается угловым, при другом — внутренним.

В заключение этого пункта заметим, что оптимум потребителя не всегда может быть определен в рамках задачи Лагранжа. Множество допустимых решений ограничено не только бюджетом потребителя, но и условиями неотрицательности объемов благ:

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ \ldots x_n \ge 0. \tag{19}$$

Обратимся к материалам раздела 2 лекции 14. Если на бюджетной поверхности норма замещения каких-либо двух благ всюду больше или — всюду меньше отношения цен, то равенство (16) не может выполняться ни в одной точке. Задача не имеет внутреннего решения, а имеет угловое решение. В рамках задачи Лагранжа не могут быть описаны решения, которые лежат на границах области, определяемой неравенствами.

Проанализируйте задачу о рационе Робинзона, изменив одно из данных: возьмите $t_1 = 10$.

Задача Лагранжа с несколькими ограничениями

При рассмотрении задачи Лагранжа с одним ограничением нам удалось обсудить основные свойства самой задачи, ее решений и некоторые следствия в сфере экономических приложений.

Задача с несколькими ограничениями имеет вид (2); но по тем же соображениями, по которым ограничение в форме (6) оказалось предпочтительнее равенства $g(X) = 0$, задачу с несколькими ограничениями мы также представим в виде

$$f(X) \to \max$$

при условии (20)

$$h_k(X) = r_k, \quad k = 1,\ldots,K.$$

Эта задача имеет много общих черт с уже рассмотренной задачей с одним ограничением. Поэтому мы без обсуждения приведем формулировку основной теоремы:

оптимальное решение задачи (20) удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1,\ldots,n; \qquad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0; \quad k = 1,\ldots,K, \qquad (22)$$

где

$$L(X;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k) = f(X) - \sum_{k-1}^{K} \lambda_k [h_k(X) - r_k].$$

Каждое из условий (22) совпадает с k-тым ограничением. Добавление к системе ограничения ведет к появлению в составе функции Лагранжа слагаемого $-\lambda_k[h_k(X) - r_k]$.

Смысл множителей Лагранжа — тот же, что и в задаче с одним ограничением. Если, как и раньше, ввести обозначение для наибольшего значения $f(X)$, достижимого при данных значениях r_k,

$$F(r_1,r_2,\ldots,r_k) = \max\{f(\mathrm{X}) \mid h_k(X) = r_k,\ k=1,\ldots,K\},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial r_k} = \lambda_k.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим поведение потребителя, выбор которого ограничен и денежным доходом, и временем, которое он может выделить на приобретение и потребление благ. Затраты времени могут быть существенными и в связи с тем, что процесс потребления может быть длительным (это относится к некоторым видам услуг), и в связи с необходимостью тратить время на стояние в очередях. Как и в задаче о рационе Робинзона, будем считать, что затраты времени на приобретение i-го блага пропорциональны его объему, и обозначим t_i удельные затраты времени. Но теперь мы можем считать, что некоторые из t_i равны нулю.

Теперь рациональный выбор — это решение задачи

$$u(X) \text{ ® } \max$$

при условиях

$$\sum_i p_i x_i = m;$$

$$\sum_i t_i x_i = T.$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda,\mu) = u(X) - \lambda\left[\sum_i p_i x_i - m\right] - \mu\left[\sum_i t_i x_i - T\right].$$

Условия оптимальности имеют вид

$$u_i = \lambda p_i + \mu t_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Здесь в правой части стоит все, чем «расплачивается» потребитель: деньги (с коэффициентом l) и время (с коэффициентом m). Множители Лагранжа l и m характеризуют предельные полезности денег и времени по отношению к выбранной функции полезности $u(X)$. Отношение m/l имеет размерность руб./ч и выражает полезность времени в денежной форме.

Зависит ли отношение $\mathtt{m}/\mathtt{l}$ от того, какая из эквивалентных функций полезности использована в качестве целевой функции?

Что дает сопоставление отношения $\mathtt{m}/\mathtt{l}$ с часовой ставкой заработной платы, имеющей ту же размерность?

VI. Аддитивные функции

1. В настоящем приложении доказываются утверждения, сформулированные в разделе 2 лекции 18 и относящиеся к аналитическому выражению функции роста вклада. Одним из основных элементов построения функции роста было рассмотрение условия аддитивности. Под *аддитивной функцией* понимают функцию, которая для любых значений аргумента x, y удовлетворяет соотношению

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Соотношения, связывающие значения неизвестной функции при различных значениях аргумента, называют функциональными уравнениями. Примером функционального уравнения является равенство (1).

Легко проверить, что при любом значении коэффициента k функция $f(x) = kx$ удовлетворяет уравнению (1). Покажем, что любая непрерывная функция, удовлетворяющая этому уравнению, имеет вид kx.

Обозначим $f(1) = k$. Тогда $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = k + k = 2k$; $f(3) = f(2 + 1) = 2k + k = 3k$ и т. д. (индукция!). Таким образом, для любого натурального значения x мы получаем

$$f(x) = kx.$$

Теперь возьмем какое-либо натуральное число M и обозначим $f(1/M) = \mathtt{m}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем $f(2/M) = 2\mathtt{m}$, $f(3/M) = 3\mathtt{m}$ и т. д.; для любого натурального числа N имеем $f(N/M) = N\mathtt{m}$. В частности, при $N = M$ получаем

$$f(M/M) = M\mathtt{m} = f(1) = k,$$

так что $\mathtt{m} = k/M$, и

$$f(N/M) = k\cdot(N/M).$$

Итак, мы убедились в том, что для любого рационального значения x аддитивная функция имеет вид $f(x) = kx$.

Пусть теперь x — какое угодно вещественное число, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Так как $f(x)$ предполагается непрерывной,