Упражнение 7

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} ax, & x<0; \\ \dfrac{1}{2}x, & 0\le x<1; \\ \dfrac{1}{2}+b\cdot(x-1), & x\ge 1. \end{cases}$$

При каких значения a и b эта функция

— выпукла вниз?

— выпукла вверх?

— не имеет постоянного знака выпуклости?

IV. Пространство благ

Основные понятия

Многие теоретические вопросы обсуждаются в нашем учебнике применительно к случаю двух продуктов. В качестве удобного средства, существенно упрощающего их анализ, использовались графические построения, в которых набор, включающий два продукта в количествах x_1, и x_2 изображался точкой на плоскости с декартовыми координатами (x_1, x_2). Перевод теоретических понятий на геометрический язык делал свойства обсуждаемых явлений весьма наглядными и при этом не приводил к потере строгости: все геометрические понятия (прямые, кривые, углы наклона и т. п.) имели точно определенные аналитические эквиваленты — уравнения, производные, соотношения между параметрами и т. д. Поэтому такие построения широко используются и в учебниках по экономике, и в научных публикациях.

Однако эти геометрические рассуждения были строгими и точными лишь для случаев, когда перечень потребляемых благ включал всего два наименования. В действительности же число благ, которыми пользуются люди, значительно больше. Выводы, полученные геометрическим путем, можно считать обладающими достаточной общностью, если их удастся распространить на случаи произвольного числа благ.

Будем считать, что мы присвоили всем мыслимым благам номера $i = 1,2,\ldots, n$, и x_i обозначает количество i-того блага. Тогда набор благ X может быть представлен n числами, расположенными в порядке номеров благ:

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{1}$$

Под n-мерным *пространством благ* будем понимать множество числовых наборов вида (1). Каждый такой набор чисел будем называть *точкой* (*элементом*) пространства, или *вектором*, а числа x_i — ее *координатами*, или *компонентами*.

Рассматривая некоторое пространство благ, мы будем считать число компонент n — размерность пространства — фиксированным; более того, на каждом месте в наборе (1) должно стоять количество блага определенного вида. Если данный потребитель не использует какое-нибудь, скажем, k-тое благо, то будем считать $x_k = 0$.

Условимся обозначать точки пространства благ большими латинскими буквами, а их координаты — соответствующими маленькими буквами с индексами — номерами координат. Нам не придется каждый раз пояснять, что, например, z_2 — это вторая координата точки Z.

Точки X и Y будем считать равными и записывать $X = Y$ в том и только том случае, если совпадают все их координаты: $x_i = y_i$. Если же точки «одинаковы» в каком-то отношении (скажем, равноценны по потребительским предпочтениям), но имеют неодинаковые координаты, мы будем их считать неравными друг другу.

Реальные наборы благ, разумеется, не могут иметь отрицательных координат. Тем не менее мы будем рассматривать пространства, точки которых могут иметь координаты любых знаков, чтобы в этих пространствах нашлось место не только для реальных наборов, но и для приращений, отклонений, «шагов» и т. д., а также для некоторых условных наборов, которые могут появиться в различных мысленных экспериментах.

Арифметические операции

Рассмотрим задачу, чрезвычайно похожую на те, с которых начинается изучение математики. Некий гражданин приобрел набор продуктов X, а его жена — набор Y. Спрашивается, сколько они купили вместе?

То, что они приобрели вместе — набор продуктов Z — естественно считать *суммой* $Z = X + Y$. При этом каждая компонента z_i есть сумма соответствующих компонент x_i и y_i:

$$z_i = x_i + y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Равенство (2), соответствующее содержательному смыслу «сложения» наборов, мы будем рассматривать в качестве определения суммы точек пространства благ. Легко проверить, что определенная таким образом операция сложения обладает обычными свойствами

$$X + Y = Y + X; \quad (X + Y) + Z = X + (Y + Z),$$

что позволяет рассматривать суммы вида $X + Y + \ldots + W$, не

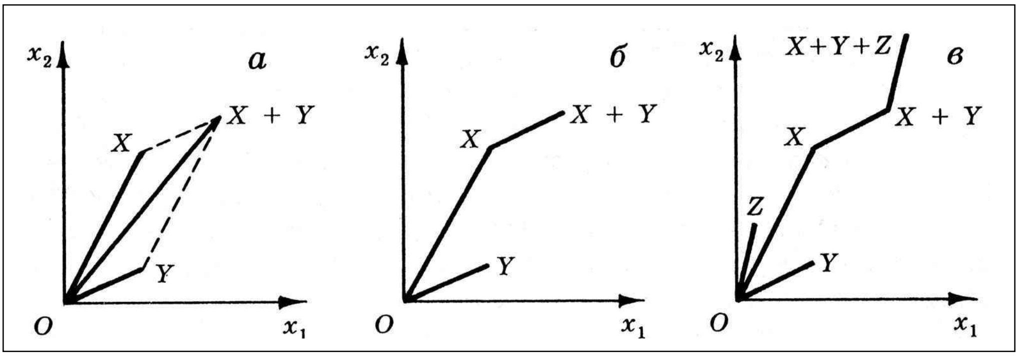


Рис. 1. Сложение элементов двумерного пространства: правило параллелограмма (*а*); правило параллельного переноса для двух слагаемых (*б*); правило параллельного переноса для произвольного числа слагаемых (*в*).

заботясь ни о порядке слагаемых, ни о последовательности выполнения операций сложения.

В пространствах двух и трех измерений сложение можно определить чисто геометрически — с помощью «правила параллелограмма» (рис. 1,*а*) или «параллельного переноса» (рис. 1,*б*). Такое геометрическое определение равносильно определению (2). Правило «параллельного переноса» удобнее в том отношении, что может быть распространено на произвольное число слагаемых (рис. 1,*в*).

Операцию вычитания можно определить как обратную по отношению к сложению. Будем называть точку Z *разностью* точек X и Y и обозначать $Z = X - Y$, если $Z + Y = X$. При этом

$$z_i = x_i - y_i, \quad i = 1,2. \ldots,n. \qquad (3)$$

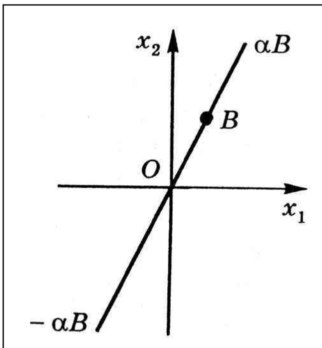
Особую роль в нашем пространстве играет нулевой элемент $O = (0,0,\ldots,0)$ — «начало координат». Для любого X справедливы равенства $X + O = X$, $X - X = O$.

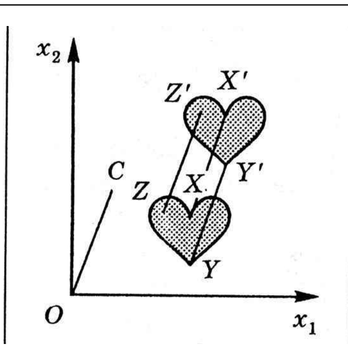
Для каждого элемента X существует *противоположный элемент*, который мы будем обозначать $-X$; мы можем определить его следующим образом: $-X = O - X$. Чтобы перейти от точки X к точке $-X$, нужно знаки всех ее компонент изменить на противоположные. Точка $-X$ симметрична точке X относительно начала координат O.

Следующая арифметическая операция — *умножение* элемента пространства *на число*. Для любого вещественного числа а определим произведение $\alpha X = Y$ как такую точку, для которой

$$y_i = \alpha x_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

В пространствах двух и трех измерений произведению вектора на число можно дать простое геометрическое определение (рис. 2).





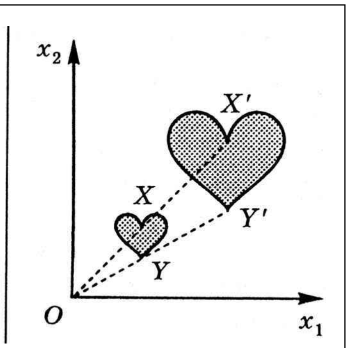


Рис. 2. Умножение элемента двумерного пространства на число (а > 0).

Рис. 3. Сдвиг на плоскости.

Рис. 4. Гомотетия на плоскости.

Соединим начало координат и точку X прямой и отложим на ней отрезок длиной $|OY| = |\text{а}|\ |OX|$ в направлении X, если а > 0, или в противоположном направлении, если а < 0.

Советуем вам самостоятельно убедиться в том, что введенные нами операции обладают следующими свойствами:

а) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$;

б) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$;

в) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$;

г) $0X = O$;

д) $1X = X$;

е) $(-1)X = -X$;

ж) если m — натуральное число, то $mX = \underbrace{X + X + \dots + X}_{m\ \text{раз}}$.

Если в «обычном» пространстве к каким-либо точкам X, Y, Z прибавить одну и ту же точку C, то точки $X' = X + C$, $Y' = Y + C$, $Z' = Z + C$ сохранят взаимное расположение исходных точек X, Y, Z и лишь переместятся в направлении отрезка OC на расстояние, равное длине этого отрезка (рис. 3). Таким образом может быть определена операция параллельного переноса некоторого множества (фигуры): перенос — это прибавление ко всем элементам множества одного и того же элемента C.

Если же все элементы некоторого множества умножить на одно и то же число, то мы получим фигуру, подобную исходной и расположенную «подобным образом». Такое преобразование в геометрии называется гомотетией с центром O и коэффициентом а (рис. 4).

Введенные выше операции над элементами пространства благ имеют смысл при любой размерности пространства; это позволяет нам использовать соответствующие геометрические термины (перенос, гомотетия), понимая их как результаты соответствующих арифметических действий.

Функции и поверхности в пространстве благ

Представьте себе, что в вашей комнате есть камин. В морозный день у камина будет тепло, а у окна — холодно. В каждой точке вашей комнаты будет какая-то температура. Мы можем считать температуру t функцией точки в пространстве вашей комнаты: t = j (X). Но можем ввести в комнате декартовы координаты и рассматривать температуру как функцию трех переменных—координат точки: t = j (x_1, x_2, x_3). Между этими описаниями существует простое соответствие — точка и ее координаты взаимно однозначно определяют друг друга.

Подобно этому, величину, зависящую от количеств различных благ, можно рассматривать и как функцию n переменных — количеств этих благ $x_1, x_2, ..., x_n$, и как функцию набора, т. е. точки в пространстве благ:

$$\mathrm{j}\,(X) = \mathrm{j}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Множество точек, в которых функция принимает одно и то же значение j $(X) = a$, называют *поверхностью уровня* функции. Поверхность уровня разделяет пространство на две части, в одной из которых j $(X) < a$, а в другой j $(X) > a$. Если, например, функция j (X) описывает количественную полезность наборов, то поверхность уровня содержит такие наборы, полезность которых равна одной и той же величине, т. е. она является поверхностью безразличия (в кардиналистском смысле). Позже мы обсудим свойства поверхностей безразличия, отказавшись от количественного представления полезности.

Особый интерес представляют линейные функции в пространстве благ. *Линейной* будем называть функцию, имеющую вид

$$l(X) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n. \tag{5}$$

Различным наборам коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответствуют разные линейные функции.

Поверхность уровня линейной функции на плоскости — это прямая, описываемая уравнением

$$b_1x_1 + b_2x_2 = a.$$

В трехмерном пространстве — это плоскость, удовлетворяющая уравнению

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = a.$$

В пространстве n измерений поверхность уровня линейной функции также будем называть плоскостью, хотя она отличается от обычной плоскости тем, что имеет не два, а $n - 1$ измерений (плоскость, размерность которой на единицу меньше размерности пространства, называют также гиперплоскостью).

Если цены p_1, по которым приобретаются блага, не зависят от объемов покупок, то расходы на приобретение набора X — линейная функция

$$s(X) = p_1x_1 + p_2x_2 +\ldots+ p_nx_n.$$

Если m — денежный доход потребителя, то уравнение $s(X) = m$ описывает его *бюджетную плоскость* — аналог бюджетной линии из лекции 14. Бюджетная плоскость отсекает от координатных осей отрезки длиной m/p_i; ее положение в трехмерном пространстве показано на рис. 5. Покупательские возможности при доходе m описываются неравенством $s(X)$ £ m вместе с неравенствами x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, ...,x_n ³ 0, выражающими неотрицательность объемов покупок.

Из определения (5) следует, что всякая линейная функция обладает свойствами

$$l(X + Y) = l(X) + l(Y); \tag{6}$$

$$l(\mathrm{a}X) = \mathrm{a}l(X). \tag{7}$$

Убедиться в этом вы можете самостоятельно.

Часто линейную функцию определяют как такую функцию, которая для любых точек X и Y и любого числа a обладает свойствами (6) и (7). Можно доказать, что любая такая функция может быть представлена в виде (5), так что оба определения эквивалентны.

Прямые и кривые

Допустим, что в момент времени t потребление некоторого человека определялось точкой $X(t)$ в пространстве благ и с течением времени

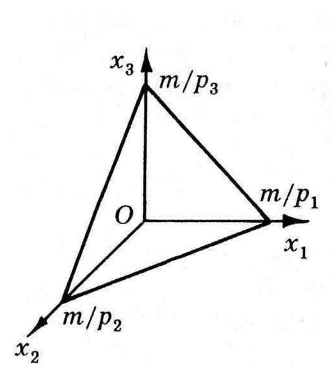


Рис. 5. Бюджетная плоскость в трехмерном пространстве.

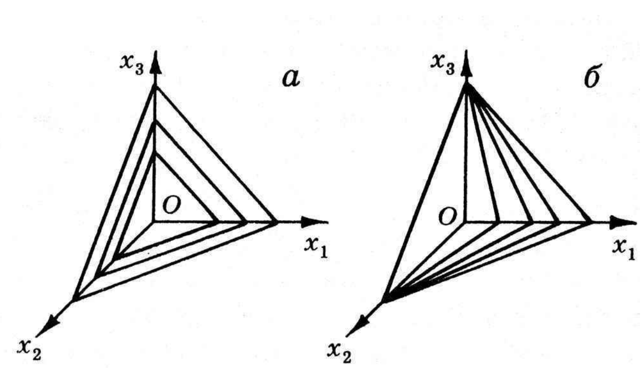


Рис. 6. Изменение положения бюджетной плоскости при изменении дохода (*а*) и при изменении цены 1-го продукта (*б*).

изменялось. Тогда при изменении времени t от t_0 до t_1 точка $X(t)$ будет смещаться из положения $X(t_0)$ в положение $X(t_1)$, прочертив в пространстве некоторую *кривую*. Этот пример показывает, каким образом могут задаваться различные кривые в пространстве благ. Если все координаты являются функциями одной и той же вещественной переменной

$$x_i = x_i(\mathrm{a}), \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

то мы можем положение точки также рассматривать как значение функции того же параметра:

$$X(\mathrm{a}) = (x_1(\mathrm{a}),x_2(\mathrm{a}),\dots,x_n(\mathrm{a})).$$

И если параметр a принимает все значения из некоторого множества, например, интервала или всей числовой прямой (как говорят, «пробегает» это множество), то переменная точка $X(\mathrm{a})$ «прочерчивает» некоторую кривую, конечную или бесконечную.

Прямые являются частным случаем кривых, и их можно задавать только что описанным способом.

Понятие прямой в n-мерном пространстве введем в два этапа. Возьмем произвольную точку B и воспользуемся рассмотренной выше операцией умножения вектора на число. Под прямой, проходящей через начало координат O и точку B, будем понимать множество точек

$$X(\mathrm{a}) = \mathrm{a}B,$$

где a пробегает всевозможные числовые значения. Если a принимает только неотрицательные значения, то точки $X(\mathrm{a})$ образуют *луч*, исходящий из начала координат и проходящий через точку B. А если a пробегает интервал $[0, 1]$, то — *отрезок*, соединяющий O и B.

Для того чтобы получить прямую, не проходящую через начало координат, можно взять прямую вида $\mathrm{a}B$ и «сдвинуть» ее. Операцию параллельного переноса, или сдвига, некоторого множества мы также рассмотрели раньше: ей соответствует прибавление ко всем элементам множества одного и того же элемента пространства благ. Таким образом, множество точек вида

$$X(\mathrm{a}) = A + \mathrm{a}B \tag{8}$$

образует некоторую прямую в пространстве благ. Так как $X(0) = A$, $X(1) = A + B$, эта прямая проходит через точки A и $A + B$. Если a принимает значения на отрезке $[0, 1]$, то точки вида (8) располагаются на отрезке, соединяющем точки A и $A + B$.

Любые две точки пространства благ можно соединить прямой. Рассмотрим произвольные точки U и V. Положим в равенстве (8) $A = U$, $A + B = V$. Отсюда $B = V - U$, и мы получаем выражение для точек искомой прямой:

$$X(\mathrm{a}) = U + \mathrm{a}(V - U),$$

или

$$X(\alpha) = (1 - \alpha)U + \alpha V. \tag{9}$$

При $0 \le \alpha \le 1$ точки вида (9) располагаются на отрезке, соединяющем точки U и V.

Отрезки в пространстве благ представляют особый интерес. Рассмотрим два набора U и V и образуем из них «смесь», или «промежуточный» набор. Для этого возьмем долю α набора V и дополнительную долю $(1 - \alpha)$ набора U и соединим их вместе. Мы получим набор, в который каждое из благ входит в количестве

$$w_i = (1-\alpha)u_i + \alpha v_i, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Таким образом мы получим набор W, лежащий на отрезке, соединяющем исходные наборы U и V. Смешивая исходные наборы в различных пропорциях, мы можем пройти весь отрезок UV.

Понятие отрезка позволяет придать строгий смысл слову «между». Будем говорить, что набор W располагается между наборами U и V, если он располагается на отрезке UV, или, иными словами, если существует число α на интервале [0,1], такое, что $W = (1 - \alpha)U + \alpha V$.

Упражнение. Советуем вам убедиться в том, что наборы B, C, D, E из табл. 1 лежат между наборами A и F. Найдите соответствующие значения параметра α.

Упражнение. Докажите теорему: если точки A и B принадлежат некоторой плоскости, то все точки прямой AB расположены в этой плоскости.

Таблица 1

Номер продукта	Наборы						Шаг
	A	B	C	D	E	F	
1	0	40	50	60	70	80	10
2	40	35	30	25	20	15	−5
3	5	6	7	8	9	10	1
4	18	16	14	12	10	8	−2

Выпуклость

С понятием отрезка связано другое понятие — выпуклости. В Математическом приложении III было приведено определение выпуклого множества на плоскости. Теперь мы можем распространить его на пространство любой размерности:

множество точек называется выпуклым, если оно обладает *следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве.*

Свойства выпуклых множеств, о которых говорится в упомянутом приложении, имеют место и для выпуклых множеств в пространстве благ любой размерности, хотя некоторые формулировки следует перевести с «плоского» на «n-мерный» язык. Например, плоскость разделяется на две части прямой, а рассматриваемое здесь пространство — гиперплоскостью. Остальные свойства могут быть перенесены без всяких изменений.

Предпочтения в пространстве благ

В лекции 13 обсуждается подход к описанию рационального поведения потребителя, не использующий количественного представления полезности и базирующийся лишь на способности потребителя сопоставить два любых набора благ и либо установить, какому из них отдать предпочтение, либо признать их равноценными. Мы будем здесь использовать следующие символы для описания соответствующих отношений:

А Ф *В*	означает	«*А* не хуже, чем *В*»;
А ф *В*	—	«*А* лучше, чем *В*»;
А Һ *В*	—	«*А* столь же привлекательно, как *В*».

В дальнейшем будем использовать слова «улучшение», «ухудшение» и т. д. в смысле отношения предпочтения, которым руководствуется данный потребитель. В таком же значении будем говорить о «возрастании» и «убывании полезности», не вкладывая в эти выражения количественного смысла.

Сформулируем некоторые основные свойства потребительских предпочтений, рассматривая их как отношения между элементами пространства благ.

1. Если x_i ³ y_i , $i = 1, ..., n$, то X Ф Y. Если к тому же X ¹ Y, то X ф Y. Это свойство характеризует монотонность предпочтения по каждой координате. Его называют *ненасыщаемостью* потребителя.

2. Если U π C π V, то на отрезке UV существует точка W, такая, что WḞ C. Иными словами, если точки U и V расположены в различных частях, на которые пространство делится множеством безразличия, то отрезок UV пересекает это множество. Это свойство характеризует *непрерывность предпочтения.*

Отмеченное свойство на первый взгляд кажется само собой разумеющимся. Тем не менее существуют такие предпочтения, для которых оно не имеет места. Примером может служить так называемое *лексикографическое* (*алфавитное*) упорядочение:

X ф Y, если $x_1 > y_1$
или $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$,

или $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ и $x_3 > y_3$,

....

или $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,...,$x_{n-1} = y_{n-1}$ и $x_n > y_n$.

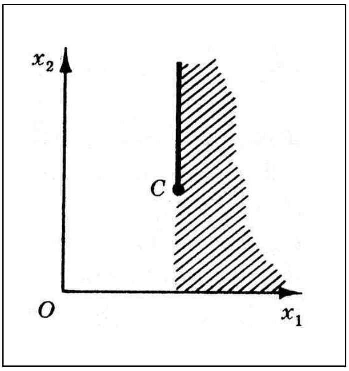


Рис. 7. Лексикографическое упорядочение.

На рис. 7 выделено множество элементов, предпочтительных по отношению к C: это полуплоскость, расположенная правее C, и луч над C. Каждое множество безразличия при этом состоит из единственной точки.

Непрерывность — чрезвычайно важное свойство предпочтения. Из него, в частности, следует существование функции полезности $u(X)$, значения которой согласованы с предпочтениями: $u(X) > u(Y)$ тогда и только тогда, когда X ф Y.

Постарайтесь доказать это утверждение самостоятельно, последовательно рассмотрев следующие положения.

Пусть B — вектор, все компоненты которого положительны, а R — луч, состоящий из точек вида аB, а ³ 0.

1) для любого X с неотрицательными компонентами на луче найдутся точки U, V, такие, что U π X π V;

2) на луче R найдется точка W, такая, что W ~ X. Иными словами, луч R пересекает все множества безразличия;

3) построим функцию $u(X)$ следующим образом. Возьмем такое число а, что X ~ аB (в силу п. 2 для любого X такое число обязательно найдется). Положим $u(X)$ = а;

4) если а > b, то аB ф bB, и обратно;

5) если $u(X) > u(Y)$, то X ф Y, и обратно, т. е. построенная в п. 3 функция есть функция полезности.

Если существует хотя бы одна функция полезности, то их существует бесконечно много: если j (u) — монотонно возрастающая функция, то $u^*(X)$ = j ($u(X)$) — также функция полезности.

Непрерывность — существенное условие существования функции полезности. Если бы предпочтение не было непрерывным, то функция полезности могла бы не существовать. Доказано, например, что для лексикографического упорядочения не существует функция полезности.

Существование функции полезности позволяет утверждать, что множество безразличия — это множество, удовлетворяющее уравнению $u(X) = c$, где c — константа. Иными словами, множество безразличия — это поверхность уровня функции полезности. Поэтому в дальнейшем мы с полным правом можем говорить о *поверхности безразличия*.

3. Отказ от количественного измерения полезности требует заменить закон убывающей предельной полезности (поскольку она также неизмерима) таким допущением о предпочтениях, которое так же согласовывалось бы с наблюдаемыми эффектами поведения потребителя.

В лекции 13 было показано, что для двух продуктов эквивалентом закона убывающей предельной полезности служит закон убывающей нормы замещения. При движении вдоль кривой безразличия в направлении возрастания x_1 и убывания x_2 абсолютное значение отношения приращений $\Delta x_2 / \Delta x_1$ снижается: при бóльших значениях x_1 и меньших значениях x_2 все меньшие по модулю приращения Δx_2 компенсируются одним и тем же приращением Δx_1.

Продолжим рассмотрение двумерного случая и выясним, как будет изменяться полезность, если мы будем двигаться не по кривой безразличия, а по некоторой прямой. При этом отношение $\beta = \Delta x_2 / \Delta x_1$, будет оставаться постоянным. Для нас будет важен следующий факт: если, начав движение с некоторой точки, мы, сделав маленький шаг, не получим улучшения набора, то при дальнейшем движении наборы будут монотонно ухудшаться.

Для направлений, в которых x_1 и x_2 оба возрастают или оба убывают, утверждение непосредственно следует из монотонности предпочтений. Поэтому ограничимся случаем, когда одна из координат (для определенности, x_1) возрастает, а другая — убывает.

Пусть, отправляясь из точки A, после первого шага мы попали в точку B и при этом не произошло улучшения набора. Это значит, что в окрестности точки B норма замещения не больше коэффициента b: потеря $|\Delta x_2| = \beta \Delta x_1$ не перекрывается возрастанием объема первого блага на величину Δx_1. При переходе от B к C с ростом x_1 и снижением x_2 норма замещения уменьшится, станет наверняка меньше, чем b, а поэтому $C \;\pi\; B$.

Теперь мы можем сказать, как будет изменяться полезность наборов на отрезке прямой. Здесь возможны два случая:

а) при движении вдоль отрезка наборы монотонно улучшаются (в противоположном направлении — монотонно ухудшаются);

б) наборы вначале будут улучшаться, а после прохождения некоторой точки — ухудшаться (и то же самое будет происходить при движении в противоположном направлении).

Эти случаи схематически представлены на рис. 8.

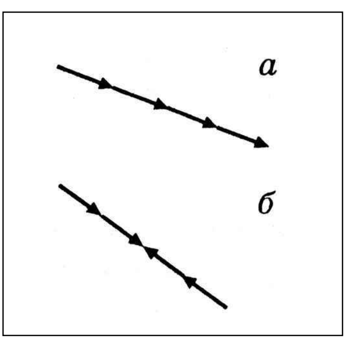


Рис. 8. Изменение полезности на отрезке.
Стрелки показывают направление возрастания полезности.

Наилучшая точка отрезка может быть и внутренней, и конечной, а наихудшая располагается обязательно на конце отрезка. Не исключено, что оба конца окажутся «одинаково плохими».

Перейдем теперь к n-мерному случаю. Возьмем два произвольных набора благ U и V. Потребитель может рассматривать наборы U, взятые в некотором количестве, как благо одного вида, а взятые в некотором количестве наборы V — как благо второго вида; назовем их «комплектное благо 1» и «комплектное благо 2». Теперь обсуждаемое допущение можно сформулировать следующим образом: при замене любого комплектного блага любым другим норма замещения убывает с увеличением объема замещаемого блага.

Рассмотрим множество Ω наборов, включающих только комплектные блага 1 и 2 в произвольных количествах. Все такие наборы имеют вид $X = \beta_1 U + \beta_2 V$, где β_1 и β_2, — неотрицательные числа, выражающие количества комплектных благ. Отрезок UV состоит из точек вида (1 − а)U + аV, причем а ³ 0 и 1 − а ³ 0, так что отрезок UV целиком содержится в множестве Ω. Но множество Ω — это двухпродуктовое пространство, в котором существуют только комплектные блага 1 и 2. А мы уже знаем, что в двухпродуктовом пространстве закон убывающей предельной полезности имеет своим следствием тот факт, что наихудшая точка любого отрезка лежит на его конце.

Возьмем теперь в пространстве благ какую-либо поверхность безразличия и точку C на ней. Пусть U ф C и V ф C, а точка X расположена на отрезке UV. Тогда обязательно имеет место отношение X ф C — ведь наихудшая точка отрезка UV — это U или V.

Таким образом, если U и V принадлежат множеству точек, не уступающих точкам данной поверхности безразличия, то и весь отрезок UV также принадлежит этому множеству. А это означает, что закон убывающей предельной полезности в пространстве благ любой размерности «выглядит» точно так же, как и в пространстве двух благ: множество наборов, не менее предпочтительных, чем лежащие на данной поверхности безразличия, выпукло.

V. Задача Лагранжа

Безусловный и условный экстремумы

Важное место в математическом аппарате экономики занимают оптимизационные задачи — задачи, в которых ищется наилучшее в определенном смысле решение. В экономической практике требуется использовать имеющиеся ресурсы наиболее выгодным образом. В экономической теории одним из отправных пунктов является постулат о том, что каждый экономический субъект, имея определенную свободу выбора своего поведения, отыскивает наилучший со своей точки зрения вариант. И оптимизационные задачи служат средством описания поведения экономических субъектов, инструментом исследования закономерностей этого поведения.

Многие задачи оптимизации формулируются следующим образом. Решение, которое должен принять субъект, описывается набором чисел