3. Все функции одной переменной с постоянной эластичностью имеют вид (8) (воспользоваться равенством (4)).

4. Функции нескольких переменных с постоянными частными эластичностями — это степенные функции вида

$$y = Ax_1^{B_1}x_2^{B_2},\dots,x_N^{B_N}.$$

III. Выпуклые множества и функции

При исследовании экономических явлений математическими методами весьма значительным оказывается такое свойство многих множеств и функций, как выпуклость. Характер поведения многих экономических объектов связан с тем. что определенные зависимости, описывающие эти объекты, являются выпуклыми. С выпуклостью функций и множеств часто связано существование или единственность решения экономических задач: на этом же свойстве основаны многие вычислительные алгоритмы.

Справедливость многих утверждений, относящихся к выпуклым множествам и функциям, совершенно ясна, они почти очевидны. В то же время их доказательство зачастую очень сложно. Поэтому здесь будут изложены некоторые основные факты, связанные с выпуклостью, без доказательств, в расчете на их интуитивную убедительность.

1. Выпуклые множества на плоскости

Любая геометрическая фигура на плоскости может рассматриваться как множество точек, принадлежащих этой фигуре. Одни множества (например, круг, прямоугольник, полоса между параллельными прямыми) содержат и внутренние, и граничные точки; другие (например, отрезок, окружность) состоят только из граничных точек.

Множество точек на плоскости называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве (рис. 1).

Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость (часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой), вся плоскость. Другие примеры выпуклых множеств приведены на рис. 2,*а*. На рис. 2,*б* приведены примеры невыпуклых множеств.

Множество, состоящее из одной-единственной точки, и пустое множество, не содержащее ни одной точки, по принятому соглашению, также считаются выпуклыми. Во всяком случае, в этих множествах невозможно провести отрезок, соединяющий какие-то точки этих множеств и не принадлежащий этим множествам целиком, — в них

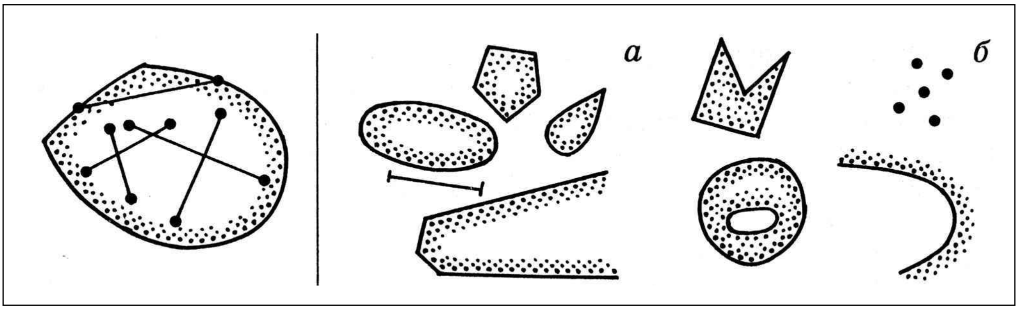

Рис. 1. Отрезок, соединяющий любые две точки выпуклой фигуры, содержится в ней целиком.
Рис. 2. Выпуклые (*а*) и невыпуклые (*б*) множества на плоскости.

вообще невозможно выбрать две точки. Поэтому их включение в число выпуклых множеств не приведет к противоречию с определением, а для математических рассуждений этого достаточно.

Пересечение, т. е. общая часть двух выпуклых множеств, всегда выпукло: взяв любые две точки пересечения (а они — общие, т. е. принадлежат каждому из пересекающихся множеств) и соединив их отрезком, мы легко убеждаемся в том, что все точки отрезка являются общими для обоих множеств, так как каждое из них выпукло. Выпуклым будет и пересечение любого числа выпуклых множеств.

Важным свойством выпуклых множеств является их отделимость: если два выпуклых множества не имеют общих внутренних точек, то плоскость можно разрезать по прямой таким образом, что одно из множеств будет целиком лежать в одной полуплоскости, а другое — в другой (на линии разреза могут располагаться точки обоих множеств). Отделяющая их прямая в одних случаях оказывается единственно возможной, в других — нет (рис. 3).

Граничная точка любого выпуклого множества сама может рассматриваться как выпуклое множество, не имеющее с исходным множе-

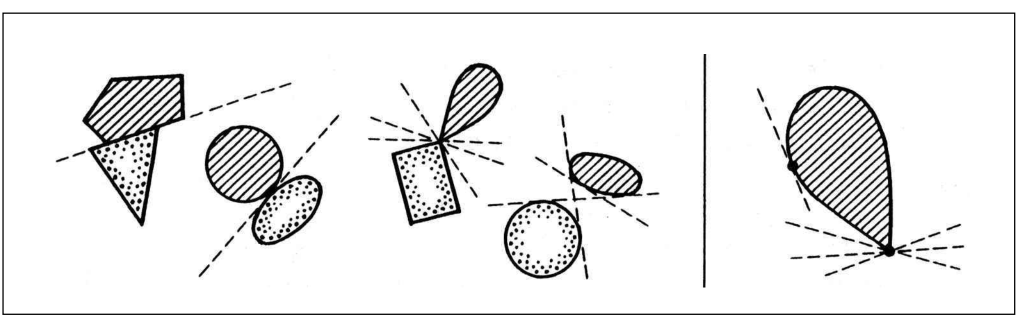

Рис. 3. Отделяющие прямые.
Рис. 4. Опорные прямые.

ством общих внутренних точек, следовательно, она может быть отделена от него некоторой прямой. Прямая, отделяющая от выпуклого множества его граничную точку, называется *опорной прямой* этого множества в данной точке. Опорные прямые в одних точках контура могут быть единственными, в других — не единственными (рис. 4).

Введем на плоскости систему декартовых координат x, y. Теперь у нас появилась возможность рассматривать различные фигуры как множества таких точек, координаты которых удовлетворяют тем или иным уравнениям или неравенствам (если координаты точки удовлетворяют какому-либо условию, будем для краткости говорить, что сама точка удовлетворяет этому условию).

Упражнение 1

Рассмотрите фигуры, точки которых удовлетворяют неравенствам:

а) $y \geq x^2$; *б*) $xy \geq 1$; *в*) $xy \geq 1$, $x > 0$; *г*) $|x| + |y|$ £ 2;

д) $(x+1)^2 + (y-2)^2$ £ 9.

Какие из них выпуклы?

Линейному уравнению $ax + by = c$ удовлетворяют точки прямой. Иными словами, прямая является решением этого уравнения. Решением линейного неравенства

$$ax + by \ {}^{3}\ c \qquad (1)$$

является полуплоскость (проверьте!).

Рассмотрим систему из N неравенств вида (1):

$$a_i x + b_i f \ {}^{3}\ c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2)$$

Решением каждого из неравенств является полуплоскость. Решение системы — это множество точек, каждая из которых удовлетворяет всем неравенствам системы, т. е. решение системы неравенств — это пересечение всех решений отдельных неравенств, составляющих систему. Полуплоскость — выпуклое множество, а пересечение выпуклых множеств всегда выпукло. Таким образом, решение системы (2) — выпуклое множество. На рис. 5 показано решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq -1; \\ x + 2y \geq 5; \\ -2x - y \geq -7. \end{cases}$$

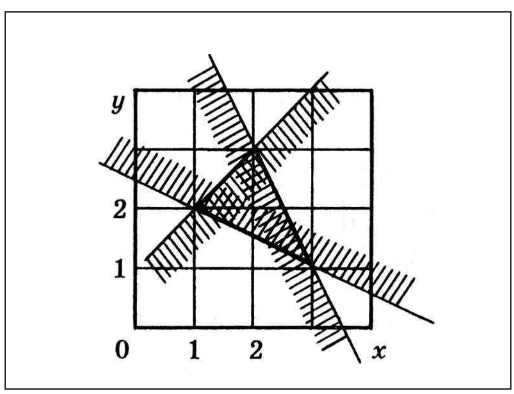

Рис. 5. Решение системы из трех линейных неравенств.

Заметим, что неравенство $ax + by$ £ c может быть заменено равносильным ему неравенством $-ax - by$ ³ $-c$, имеющим вид (1). Кроме того, уравнение $ax + by = c$ равносильно такой паре неравенств:

$$\begin{cases} ax + by \geq c; \\ ax + by \leq c. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений и неравенств — всегда выпуклое множество.

Упражнение 2

Будет ли решение системы

$$a_i x + b_i y > c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

выпуклым множеством? Чем оно отличается от решения системы (2)?

Упражнение 3

Придумайте системы неравенств, решениями которых будут: а) параллелограмм; б) внутренность угла; в) полоса между двумя параллельными прямыми; г) единственная точка; д) пустое множество.

2. Выпуклые функции одной переменной

Проще всего определить выпуклую функцию геометрически. Для этого полезно ввести понятие *надграфика* функции. Надграфиком функции называется множество точек, расположенных над графиком функции и на самом графике. Более строго, надграфик функции $f(x)$ — это множество таких точек, координата x которых лежит в области определения функции, а координата y удовлетворяет неравенству y ³ $f(x)$.

Функция называется выпуклой вниз, если ее надграфик — выпуклое множество. Рис. 6 иллюстрирует это определение.

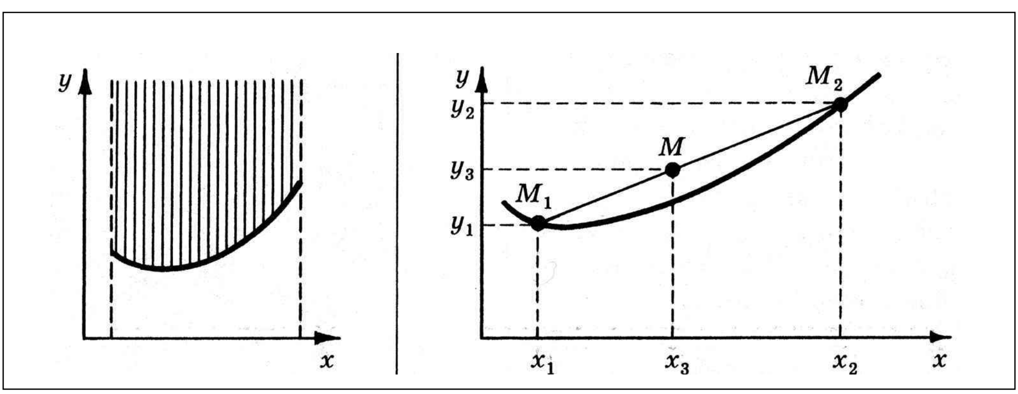

Рис. 6. Надграфик выпуклой функции.
Рис. 7. Точка хорды не может располагаться ниже графика.

Приведенное определение является вполне строгим и может быть однозначно переведено на аналитический язык.

Во-первых, функция $f(x)$ должна иметь выпуклую область определения — отрезок, луч или всю прямую.

В противном случае надграфик распался бы на несколько отдельных областей, и отрезок, соединяющий точки из разных областей, проходил бы через «запретную зону».

Для выяснения того, какому условию должны отвечать значения выпуклой вниз функции $f(x)$ «выберем какие-либо две точки M_1 и M_2 на ее графике и проведем хорду $M_1 M_2$ (рис. 7). Она целиком должна лежать в надграфике, т. е. надграфику должна принадлежать любая точка M хорды.

Рассмотрим число λ, показывающее, в какой пропорции точка M делит хорду:

$$\lambda = \frac{|M_2M|}{|M_2M_1|}.$$

Эта величина лежит в пределах $0 \le \lambda \le 1$. Ясно, что в такой же пропорции абсцисса и ордината точки M делят отрезки $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$:

$$x_2 - x_3 = \lambda\cdot(x_2 - x_1);$$
$$y_2 - y_3 = \lambda\cdot(y_2 - y_1);$$

или

$$x_3 = \lambda\cdot x_1 + (1 - \lambda)x_2;$$
$$y_3 = \lambda\cdot y_1 + (1 - \lambda)y_2.$$

Условие принадлежности точки M надграфику — это выполнение неравенства $y_3 \ge f(x_3)$. А так как $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ — это неравенство можно представить в виде

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \ge f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2). \tag{3}$$

Если неравенство (3) выполняется для любых значений x_1 и x_2, то любая хорда лежит в надграфике, тем более в надграфике лежит любой отрезок, соединяющий точки, расположенные выше.

Таким образом, функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве, выпукла вниз, если она обладает следующим свойством: для любых двух чисел x_1 и x_2 из области определения функции и любого числа λ из отрезка $[0, 1]$ выполняется неравенство (3).

Неравенство (3) часто записывают в «симметричном» виде

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \ge f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \tag{4}$$

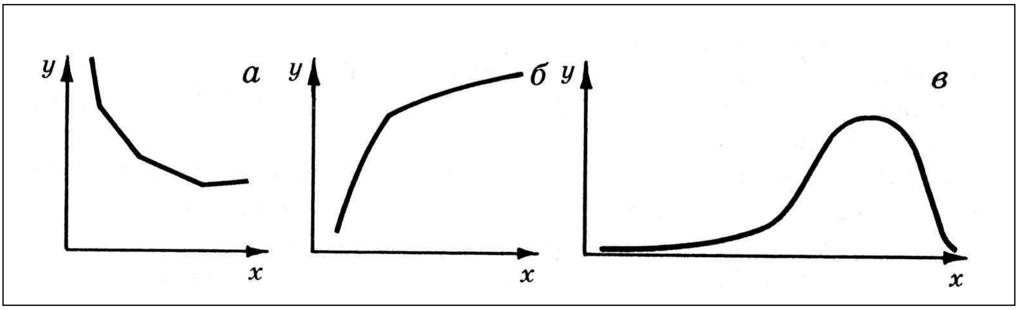

Рис. 8. Функции: выпуклая вниз (*а*), выпуклая вверх (*б*), не имеющая постоянного знака выпуклости (*в*).

где

$$l_1 \;³\; 0, \quad l_2 \;³\; 0, \qquad l_1 + l_2 = 1.$$

Аналогично можно определить и функции, выпуклые вверх: для этого нужно знаки неравенства (3) и (4) заменить на противоположные.

Функции, выпуклые вниз, часто называют просто «выпуклыми».

Выпуклые функции обладают свойством более общим, чем неравенство (4). Если x_1, x_2,..., x_N — произвольные значения аргумента l_1, l_2,..., l_N — неотрицательные числа, сумма которых равна единице, то

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right).$$

Выберем четыре значения аргумента $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ и проведем хорду M_1M_4 (рис. 9).

Промежуточные точки M_2 и M_3 лежат в надграфике, так что угол наклона хорды $M_1M_2^*$ не больше, а хорды $M_3^*M_4$ — не меньше, чем угол наклона хорды $M_1M_4^*$ к оси абсцисс (углы наклона — с учетом знаков!). Следовательно, скорость возрастания выпуклой функции в области «больших» значений аргумента (на участке $[x_3, x_4]$) не меньше, чем в области «малых» значений ($[x_1, x_2]$). Переходя к пределам при x_2 ® x_1 и x_4 ® x_3, найдем, что $f'(x_3) \geq f'(x_1)$, т. е. производная $f'(x)$ дифференцируемой выпуклой функции $f(x)$— неубывающая функция.

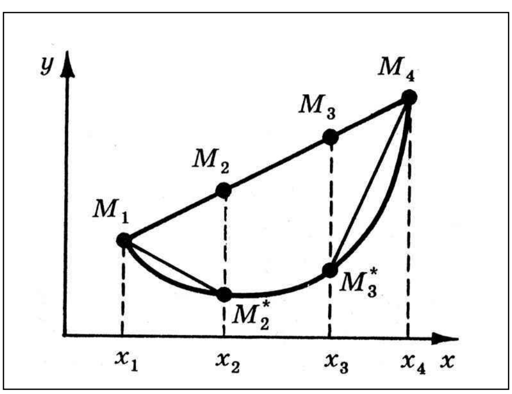

Рис. 9. Хорда, проведенная в области больших значений аргумента, имеет больший угол наклона, чем хорда в области малых значений.

Если производная $f'(x)$ дифференцируема (т. е. выпуклая функция $f(x)$ дважды дифференцируема), то $f''(x) \geq 0$. Для дважды дифференцируемых функций это неравенство оказывается равносильным приведенному выше определению выпуклой функции; в курсах математического анализа выпуклость обычно определяют по знаку второй производной. Но в экономических приложениях, где часто приходится иметь дело с функциями, графики которых имеют изломы, такое определение оказывается мало полезным.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые функции и a ^{3} 0, то выпуклыми будут функции

а) $af(x)$;
б) $f(x) + g(x)$;
в) $\max(f(x), g(x))$.

Выпуклость функций в а) и б) проверяется непосредственно с помощью неравенства (3) или (4). Функция в) при каждом x принимает значение, равное большему из значений $f(x)$ и $g(x)$ (и любому из них, если они равны). Надграфик функции $\max(f(x), g(x))$ есть пересечение надграфиков функций $f(x)$ и $g(x)$ (проверьте!) — отсюда и выпуклость функции в).

Упражнение 4

Существуют ли функции, выпуклые вниз и выпуклые вверх одновременно?

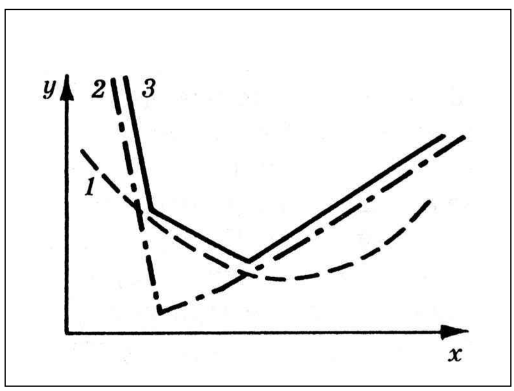

Рис. 10. Графики функций $f(x)$ (*1*), $g(x)$ (*2*) **и** $\max(f(x), g(x))$ (*3*).

Упражнение 5

Как выглядит график функции $f(x) = \max(0, a + bx)$ при различных значениях параметров a и b? Выпуклы ли эти функции?

Упражнение 6

Выпукла ли функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x),$$

где

$$f_i(x) = \max(0, a_i + b_i x)?$$

Как выглядит ее график?

Упражнение 7

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} ax, & x<0; \\ \dfrac{1}{2}x, & 0\le x<1; \\ \dfrac{1}{2}+b\cdot(x-1), & x\ge 1. \end{cases}$$

При каких значения a и b эта функция

— выпукла вниз?

— выпукла вверх?

— не имеет постоянного знака выпуклости?

IV. Пространство благ

Основные понятия

Многие теоретические вопросы обсуждаются в нашем учебнике применительно к случаю двух продуктов. В качестве удобного средства, существенно упрощающего их анализ, использовались графические построения, в которых набор, включающий два продукта в количествах x_1, и x_2 изображался точкой на плоскости с декартовыми координатами (x_1, x_2). Перевод теоретических понятий на геометрический язык делал свойства обсуждаемых явлений весьма наглядными и при этом не приводил к потере строгости: все геометрические понятия (прямые, кривые, углы наклона и т. п.) имели точно определенные аналитические эквиваленты — уравнения, производные, соотношения между параметрами и т. д. Поэтому такие построения широко используются и в учебниках по экономике, и в научных публикациях.

Однако эти геометрические рассуждения были строгими и точными лишь для случаев, когда перечень потребляемых благ включал всего два наименования. В действительности же число благ, которыми пользуются люди, значительно больше. Выводы, полученные геометрическим путем, можно считать обладающими достаточной общностью, если их удастся распространить на случаи произвольного числа благ.

Будем считать, что мы присвоили всем мыслимым благам номера $i = 1,2,\ldots, n$, и x_i обозначает количество i-того блага. Тогда набор благ X может быть представлен n числами, расположенными в порядке номеров благ:

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{1}$$