## Упражнения

1. Суммарная величина описывается функцией

$$f(x) = a + bx + cx^2,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Найдите явные выражения для $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$, участки возрастания и убывания средней величины и положение ее минимума; представьте результаты графически.

2. Функция $f(x)$ задана графически (рис. 5). Постройте качественно графики функций $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$. Чем интересны точки $a$, $b$, $c$, $d$?

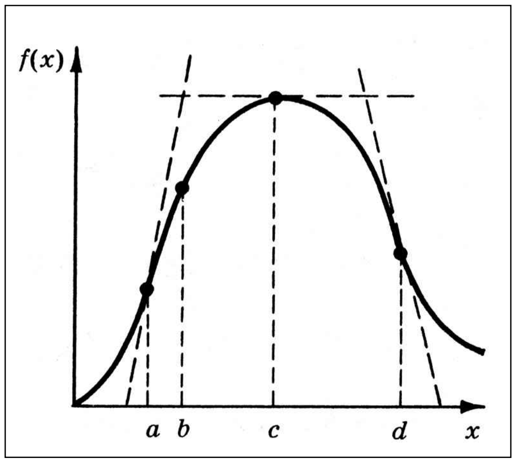


**Рис. 5. К упражнению 2.**

3. Суммарная величина описывается степенной функцией $f(x) = ax^b$. Докажите, что при всех $x$ средние затраты пропорциональны предельным.

Советуем Вам после прочтения Математического приложения II выполнить следующие упражнения, в которых $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой положительной функцией при $x > 0$.

4. Докажите тождества:

$$\mathrm{E}_x[f] = f'(x)/\bar{f}(x);$$

$$\mathrm{E}_x\left[\bar{f}\right] = \mathrm{E}_x[f] - 1.$$

5. Докажите, что $\bar{f}(x)$ возрастает при убывает при $\mathrm{E}_x(f) < 1$ и принимает экстремальное значение при $\mathrm{E}_x(f) = 1$.

# II. Эластичность функции

Пусть величина $y$ зависит от величины $x$, и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Главный вопрос анализа зависимостей — это выяснение того, как изменится зависимая переменная $y$ вследствие изменения аргумента $x$. Основное понятие дифференциального исчисления — производная — определяется как предел отношения *абсолютных* приращений переменных

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Но очень часто *относительные* изменения интересуют экономиста гораздо больше, чем абсолютные. Если, например, маленький арбуз подорожал на 15 коп., то при этом большой арбуз подорожал, скажем, на 50 коп. или даже на рубль. В то же время, если арбузы подорожали в 1.5 раза, то в 1.5 раза дороже стал и маленький, и большой арбуз, и килограмм, и вагон арбузов.

Анализ относительных изменений позволяет судить о многих экономических явлениях с большей степенью общности, чем анализ абсолютных изменений. Поэтому наряду с производными при анализе различных зависимостей в экономике широко пользуются особыми показателями — эластичностями. Введем обозначения для относительных приращений:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x};$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

Эластичностью переменной $y$ по переменной $x$ называется предел

$$\mathrm{E}_x[f] = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}. \tag{2}$$

Разумеется, относительные отклонения имеют смысл лишь для величин, которые могут принимать только положительные значения. Это относится и к эластичностям. Поэтому дальше мы всюду будем полагать $x > 0$, $y > 0$. При этом случаи $x = 0$ или $y = 0$ могут рассматриваться только как предельные.

Так как условие предельного перехода $\delta x \to 0$ равносильно условию $\Delta x \to 0$, равенство (2) может быть раскрыто следующим образом:

$$\mathrm{E}_x[f] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{x}{y},$$

а с учетом определения производной (1) получаем

$$\mathrm{E}_x[f] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \tag{3}$$

Поскольку $x$ и $y$ положительны, знак эластичности всегда совпадает со знаком производной: $\mathrm{E}_x[y] > 0$ — для возрастающий функций, $\mathrm{E}_x[y] < 0$ — для убывающих. При разных значениях аргумента эластичность может принимать различные значения: $\mathrm{E}_x[y] > 0$ — на участках возрастания, $\mathrm{E}_x[y] < 0$ — на участках убывания функции.

Чтобы сделать понятие эластичности более доходчивым, некоторые авторы определяют его так: эластичность показывает, на сколько процентов увеличится значение функции, если аргумент увеличится на 1 %. Это определение не совсем точно: относительное приращение 0.01 в обычных случаях можно считать малой величиной, но все-таки не бесконечно малой, как это предполагается определением (2). Так, для функции $y = Ax^2$ эластичность, как показывает равенство (3), равна 2, а увеличение $x$ на 1 % влечет за собой увеличение $y$ на 2.01 % (проверьте!).

Из равенства (3) следуют основные свойства эластичности:

а) эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены аргумент и функция. Если $u = Ax$, $v = By$, то

$$\mathrm{E}_u[x] = \frac{dv}{du} \cdot \frac{u}{v} = \frac{B}{A} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{Ax}{By} = \mathrm{E}_x[y];$$

б) эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$\mathrm{E}_y[x] = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{\mathrm{E}_x[y]}.$$

Это следует непосредственно из определения (2);

в) эластичность переменной $y$ по переменной $x$ равна производной логарифма $y$ по логарифму $x$. Так как

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d\ln y}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

справедливо равенство

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y / dx}{d\ln x / dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \mathrm{E}_x[y],$$

или

$$\mathrm{E}_x[y] = \frac{d\log y}{d\log x}. \tag{4}$$

В последнем выражении использованы логарифмы по произвольному основанию: переход от одного основания логарифмов к другому равносилен умножению на константу и числителя, и знаменателя дроби (4), а это не изменит ее значения.

Равенство (4) показывает, что изучение различных свойств эластичности легко свести к изучению соответствующих свойств производных: достаточно перейти от величин $x$ и $y$ к их логарифмам.

Допустим, нас интересует эластичность произведения $uv$ двух переменных, зависящих от одного и того же аргумента $x$:

$$E_x[uv] = \frac{d\ln uv}{d\ln x} = \frac{d\ln u}{d\ln x} + \frac{d\ln v}{d\ln x} = E_x[u] + E_x[v].$$

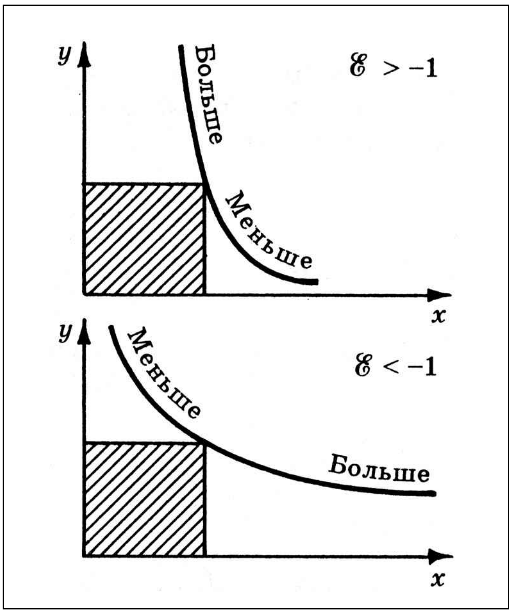


**Рис. 1. Изменение произведения** $xy$ **при различных значениях эластичности.**

Так как $E_x[x] = 1$, из последнего равенства получаем выражение важного частного случая:

$$E_x[xy] = E_x[y] + 1. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что произведение $xy$ убывает с ростом $x$, если $E_x[y] < -1$, и возрастает, если $E_x[y] > -1$ (рис. 1).

Как можно оценить эластичность функции $y = f(x)$ по ее графику? Рассмотрим вначале возрастающую функцию (эластичность при этом положительна). Выберем на графике точку $M$ и проведем через эту точку касательную; обозначим $A$ и $B$ — точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат, а $C$ и $D$ — проекции точки $M$ на координатные оси. Допустим, что касательная пересекает ось ординат в отрицательной области, как это показано на рис. 2,*а*.

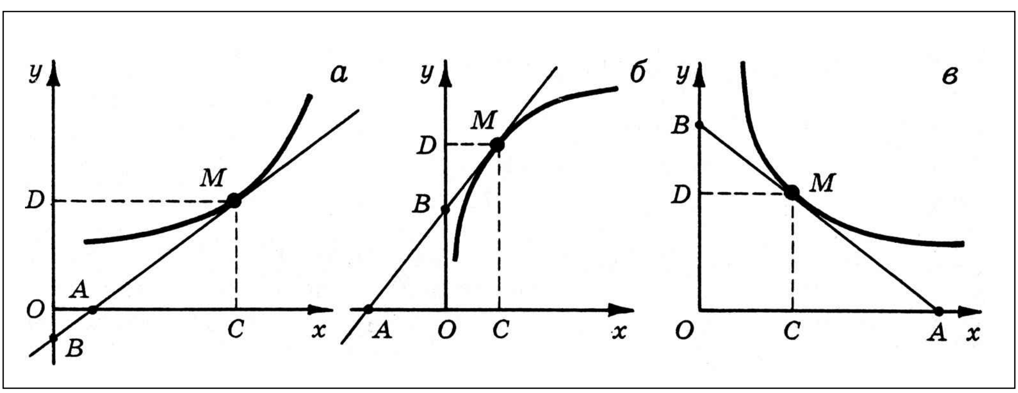


**Рис. 2. Геометрические характеристики эластичности: варианты положения касательной к графику функции.**

Из свойств производной следует, что $\dfrac{|MC|}{|AC|} = \dfrac{dy}{dx}$.

Но $|MC| = y$, $|MD| = |OC| = x$, а из подобия треугольников $BMD$ и $MAC$ следует

$$\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|AC|} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

или

$$\mathrm{E}_x[y] = \frac{|MB|}{|MA|}. \tag{6}$$

Все приведенные выкладки и результат (6) полностью применимы и к положению касательной на рис. 2,*б*.

Разница состоит лишь в том, что в первом случае $|MB| > |MA|$, так что он относится к значениям $\mathrm{E}_x[y] > 1$; во втором случае $|MB| < |MA|$, так что здесь $0 < \mathrm{E}_x[y] < 1$. При $\mathrm{E}_x[y] = 1$ касательная проходит через начало координат.

График для функции с отрицательной эластичностью представлен на рис. 2,*в*. Все обозначения оставлены прежними. Рассуждая по аналогии, читатель без труда установит, что в этом случае

$$\mathrm{E}_x[y] = -\frac{|MB|}{|MA|}. \tag{7}$$

Мы могли бы применить равенство (6) и к этому случаю, если бы условились считать отношение отрезков положительным, если они направлены в одну сторону (от точки $M$), и отрицательным — если в противоположные.

Рассмотрим теперь эластичность двух видов функций, широко используемых в различных экономических моделях.

Рассмотрим степенную функцию (рис. 3) вида

$$y = Ax^B. \tag{8}$$

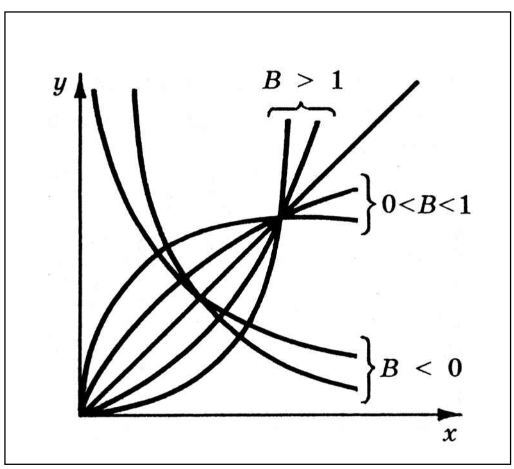


**Рис. 3. Степенные функции.**

Ее производная равна $\dfrac{dy}{dx} = ABx^{B-1}$,
а эластичность

$$\mathrm{E}_x[y] = ABx^{B-1} \cdot \frac{x}{Ax^B} = B \tag{9}$$

при любых значениях $x$. Иными словами, эластичность степенной функции постоянна и совпадает с показателем степени.

Линейная функция (рис. 4)

$$y = a + bx \tag{10}$$

имеет постоянную производную, но ее эластичность при $a \neq 0$ изменяется с изменением $x$.

Понятие эластичности распространяется и на функции нескольких переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Под частной эластичностью функции по одному из аргументов $x_k$ понимается эластичность переменной $y$, рассматриваемой в зависимости только от $x_k$, при постоянных значениях остальных аргументов. Она связана с частной производной по этому аргументу соотношением

$$\mathrm{E}_{x_k}[y] = \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{y}.$$

Следующие утверждения могут быть доказаны читателем как самостоятельные упражнения.

**1.** Для линейной функции (10): а) если $a > 0$, $b > 0$, то с изменением $x$ от 0 до $+\infty$ эластичность возрастает от 0 до +1 (рис. 4,*а*);

б) если $a < 0$, $b > 0$, то с изменением $x$ от $-a/b$ до $+\infty$ эластичность убывает от $+\infty$ до +1 (рис. 4,*б*);

в) если $a > 0$, $b < 0$, то с изменением $x$ от 0 до $-a/b$ эластичность убывает от 0 до $-\infty$; в середине этого отрезка $\mathrm{E}_x[y] = -1$ (рис. 4,*в*);

**2.** Эластичность показательной функции $y = AB^x$ изменяется пропорционально $x$.

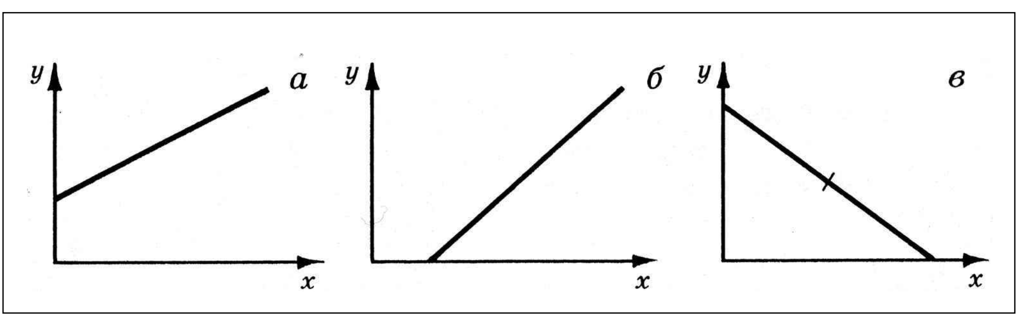


**Рис. 4. Варианты линейной функции.**

3. Все функции одной переменной с постоянной эластичностью имеют вид (8) (воспользоваться равенством (4)).

4. Функции нескольких переменных с постоянными частными эластичностями — это степенные функции вида

$$y = Ax_1^{B_1} x_2^{B_2}, \dots, x_N^{B_N}.$$

# III. Выпуклые множества и функции

При исследовании экономических явлений математическими методами весьма значительным оказывается такое свойство многих множеств и функций, как выпуклость. Характер поведения многих экономических объектов связан с тем. что определенные зависимости, описывающие эти объекты, являются выпуклыми. С выпуклостью функций и множеств часто связано существование или единственность решения экономических задач: на этом же свойстве основаны многие вычислительные алгоритмы.

Справедливость многих утверждений, относящихся к выпуклым множествам и функциям, совершенно ясна, они почти очевидны. В то же время их доказательство зачастую очень сложно. Поэтому здесь будут изложены некоторые основные факты, связанные с выпуклостью, без доказательств, в расчете на их интуитивную убедительность.

## 1. Выпуклые множества на плоскости

Любая геометрическая фигура на плоскости может рассматриваться как множество точек, принадлежащих этой фигуре. Одни множества (например, круг, прямоугольник, полоса между параллельными прямыми) содержат и внутренние, и граничные точки; другие (например, отрезок, окружность) состоят только из граничных точек.

Множество точек на плоскости называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве (рис. 1).

Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость (часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой), вся плоскость. Другие примеры выпуклых множеств приведены на рис. 2,*а*. На рис. 2,*б* приведены примеры невыпуклых множеств.

Множество, состоящее из одной-единственной точки, и пустое множество, не содержащее ни одной точки, по принятому соглашению, также считаются выпуклыми. Во всяком случае, в этих множествах невозможно провести отрезок, соединяющий какие-то точки этих множеств и не принадлежащий этим множествам целиком, — в них