

Упражнения

1. Суммарная величина описывается функцией

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Найдите явные выражения для $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$, участки возрастания и убывания средней величины и положение ее минимума; представьте результаты графически.

2. Функция $f(x)$ задана графически (рис. 5). Постройте качественно графики функций $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$. Чем интересны точки a, b, c, d ?

3. Суммарная величина описывается степенной функцией $f(x) = ax^b$. Докажите, что при всех x средние затраты пропорциональны предельным.

Советуем Вам после прочтения Математического приложения II выполнить следующие упражнения, в которых $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой положительной функцией при $x > 0$.

4. Докажите тождества:

$$E_x[f] = f'(x) / \bar{f}(x);$$

$$E_x[\bar{f}] = E_x[f] - 1.$$

5. Докажите, что $\bar{f}(x)$ возрастает при экстремальное значение при $E_x(f) = 1$.

убывает при $E_x(f) < 1$ и принимает

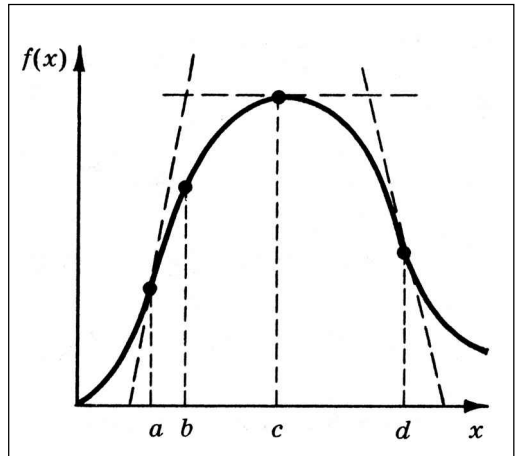


Рис. 5. К упражнению 2.

II. Эластичность функции

Пусть величина y зависит от величины x , и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Главный вопрос анализа зависимостей — это выяснение того, как изменится зависимая переменная y вследствие изменения аргумента x . Основное понятие дифференциального исчисления — производная — определяется как предел отношения абсолютных приращений переменных

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Но очень часто *относительные* изменения интересуют экономи-

ста гораздо больше, чем абсолютные. Если, например, маленький арбуз подорожал на 15 коп., то при этом большой арбуз подорожал, скажем, на 50 коп. или даже на рубль. В то же время, если арбузы подорожали в 1.5 раза, то в 1.5 раза дороже стал и маленький, и большой арбуз, и килограмм, и вагон арбузов.

Анализ относительных изменений позволяет судить о многих экономических явлениях с большей степенью общности, чем анализ абсолютных изменений. Поэтому наряду с производными при анализе различных зависимостей в экономике широко пользуются особыми показателями — эластичностями. Введем обозначения для относительных приращений:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x};$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

Эластичностью переменной y по переменной x называется предел

$$E_x[f] = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}. \quad (2)$$

Разумеется, относительные отклонения имеют смысл лишь для величин, которые могут принимать только положительные значения. Это относится и к эластичностям. Поэтому дальше мы всюду будем полагать $x > 0$, $y > 0$. При этом случаи $x = 0$ или $y = 0$ могут рассматриваться только как предельные.

Так как условие предельного перехода $\delta x \rightarrow 0$ равносильно условию $\Delta x \rightarrow 0$, равенство (2) может быть раскрыто следующим образом:

$$E_x[f] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \frac{x}{y},$$

а с учетом определения производной (1) получаем

$$E_x[f] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (3)$$

Поскольку x и y положительны, знак эластичности всегда совпадает со знаком производной: $E_x[y] > 0$ — для возрастающих функций, $E_x[y] < 0$ — для убывающих. При разных значениях аргумента эластичность может принимать различные значения: $E_x[y] > 0$ — на участках возрастания, $E_x[y] < 0$ — на участках убывания функции.

Чтобы сделать понятие эластичности более доходчивым, некоторые авторы определяют его так: эластичность показывает, на сколько

процентов увеличится значение функции, если аргумент увеличится на 1 %. Это определение не совсем точно: относительное приращение 0.01 в обычных случаях можно считать малой величиной, но все-таки не бесконечно малой, как это предполагается определением (2). Так, для функции $y = Ax^2$ эластичность, как показывает равенство (3), равна 2, а увеличение x на 1 % влечет за собой увеличение y на 2.01 % (проверьте!).

Из равенства (3) следуют основные свойства эластичности:

а) эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены аргумент и функция. Если $u = Ax$, $v = By$, то

$$E_u[x] = \frac{dv}{du} \cdot \frac{u}{v} = \frac{B}{A} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{Ax}{By} = E_x[y];$$

б) эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_y[x] = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{E_x[y]}.$$

Это следует непосредственно из определения (2);

в) эластичность переменной y по переменной x равна производной логарифма y по логарифму x . Так как

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d \ln y}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

справедливо равенство

$$\frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{d \ln y / dx}{d \ln x / dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = E_x[y],$$

или

$$E_x[y] = \frac{d \log y}{d \log x}. \tag{4}$$

В последнем выражении использованы логарифмы по произвольному основанию: переход от одного основания логарифмов к другому равносильно умножению на константу и числителя, и знаменателя дроби (4), а это не изменит ее значения.

Равенство (4) показывает, что изучение различных свойств эластичности легко свести к изучению соответствующих свойств производных: достаточно перейти от величин x и y к их логарифмам.

Допустим, нас интересует эластичность произведения uv двух переменных, зависящих от одного и того же аргумента x :

$$E_x[uv] = \frac{d \ln uv}{d \ln x} = \frac{d \ln u}{d \ln x} + \frac{d \ln v}{d \ln x} = E_x[u] + E_x[v].$$

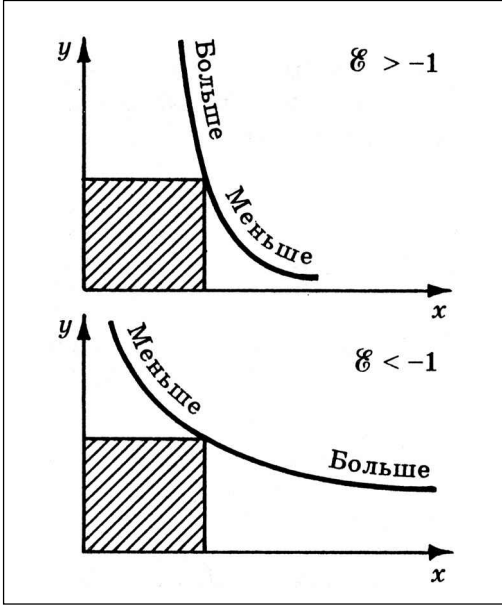


Рис. 1. Изменение произведения $xу$ при различных значениях эластичности.

Так как $E_x[x] = 1$, из последнего равенства получаем выражение важного частного случая:

$$E_x[xy] = E_x[y] + 1. \quad (5)$$

Отсюда следует, что произведение $xу$ убывает с ростом x , если $E_x[y] < -1$, и возрастает, если $E_x[y] > -1$ (рис. 1).

Как можно оценить эластичность функции $y = f(x)$ по ее графику? Рассмотрим вначале возрастающую функцию (эластичность при этом положительна). Выберем на графике точку M и проведем через эту точку касательную; обозначим A и B — точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат, а C и D — проекции точки M на координатные оси. Допустим, что касательная пересекает ось ординат в отрицательной области, как это показано на рис. 2, а.

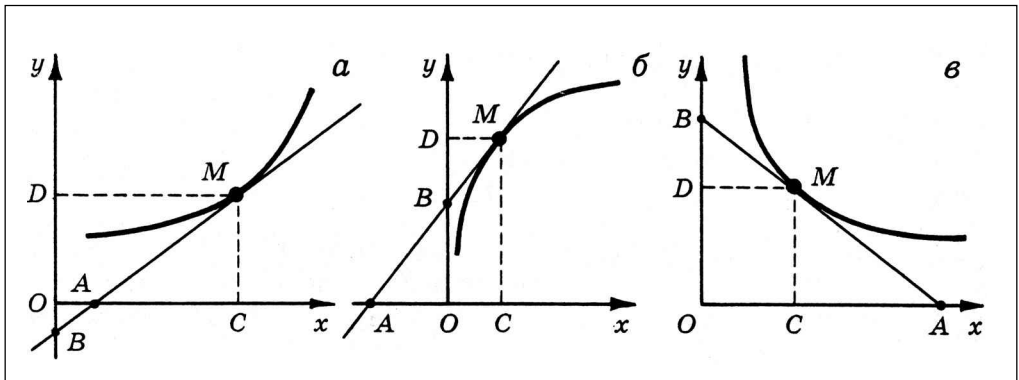


Рис. 2. Геометрические характеристики эластичности: варианты положения касательной к графику функции.

Из свойств производной следует, что $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{dy}{dx}$.

Но $|MC| = y$, $|MD| = |OC| = x$, а из подобия треугольников BMD и MAC следует

$$\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|AC|} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

или

$$E_x[y] = \frac{|MB|}{|MA|}. \tag{6}$$

Все приведенные выкладки и результат (6) полностью применимы и к положению касательной на рис. 2,б.

Разница состоит лишь в том, что в первом случае $|MB| > |MA|$, так что он относится к значениям $E_x[y] > 1$; во втором случае $|MB| < |MA|$, так что здесь $0 < E_x[y] < 1$. При $E_x[y] = 1$ касательная проходит через начало координат.

График для функции с отрицательной эластичностью представлен на рис. 2,в. Все обозначения оставлены прежними. Рассуждая по аналогии, читатель без труда установит, что в этом случае

$$E_x[y] = -\frac{|MB|}{|MA|}. \tag{7}$$

Мы могли бы применить равенство (6) и к этому случаю, если бы условились считать отношение отрезков положительным, если они направлены в одну сторону (от точки M), и отрицательным — если в противоположные.

Рассмотрим теперь эластичность двух видов функций, широко используемых в различных экономических моделях.

Рассмотрим степенную функцию (рис. 3) вида

$$y = Ax^B. \tag{8}$$

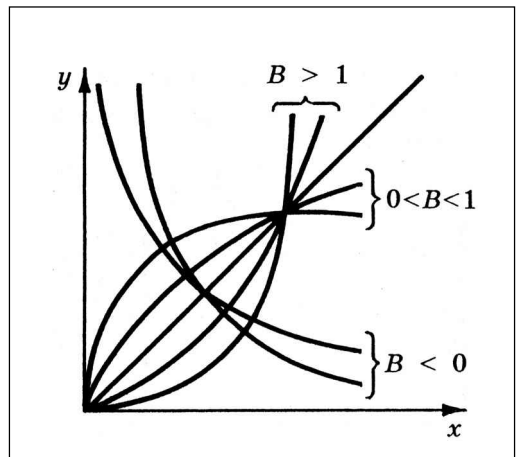


Рис. 3. Степенные функции.

Ее производная равна $\frac{dy}{dx} = ABx^{B-1}$,

а эластичность

$$E_x[y] = ABx^{B-1} \cdot \frac{x}{Ax^B} = B \quad (9)$$

при любых значениях x . Иными словами, эластичность степенной функции постоянна и совпадает с показателем степени.

Линейная функция (рис. 4)

$$y = a + bx \quad (10)$$

имеет постоянную производную, но ее эластичность при $a \neq 0$ изменяется с изменением x .

Понятие эластичности распространяется и на функции нескольких переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Под частной эластичностью функции по одному из аргументов x_k понимается эластичность переменной y , рассматриваемой в зависимости только от x_k , при постоянных значениях остальных аргументов. Она связана с частной производной по этому аргументу соотношением

$$E_{x_k}[y] = \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{y}.$$

Следующие утверждения могут быть доказаны читателем как самостоятельные упражнения.

1. Для линейной функции (10): а) если $a > 0$, $b > 0$, то с изменением x от 0 до $+\infty$ эластичность возрастает от 0 до +1 (рис. 4,а);

б) если $a < 0$, $b > 0$, то с изменением x от $-a/b$ до $+\infty$ эластичность убывает от $+\infty$ до +1 (рис. 4,б);

в) если $a > 0$, $b < 0$, то с изменением x от 0 до $-a/b$ эластичность убывает от 0 до $-\infty$; в середине этого отрезка $E_x[y] = -1$ (рис. 4,в);

2. Эластичность показательной функции $y = AB^x$ изменяется пропорционально x .

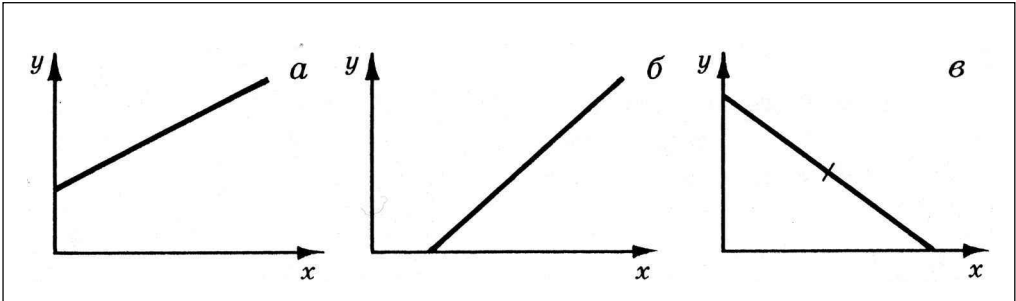


Рис. 4. Варианты линейной функции.

3. Все функции одной переменной с постоянной эластичностью имеют вид (8) (воспользоваться равенством (4)).

4. Функции нескольких переменных с постоянными частными эластичностями — это степенные функции вида

$$y = Ax_1^{B_1} x_2^{B_2} \dots x_N^{B_N}.$$

III. Выпуклые множества и функции

При исследовании экономических явлений математическими методами весьма значительным оказывается такое свойство многих множеств и функций, как выпуклость. Характер поведения многих экономических объектов связан с тем, что определенные зависимости, описывающие эти объекты, являются выпуклыми. С выпуклостью функций и множеств часто связано существование или единственность решения экономических задач: на этом же свойстве основаны многие вычислительные алгоритмы.

Справедливость многих утверждений, относящихся к выпуклым множествам и функциям, совершенно ясна, они почти очевидны. В то же время их доказательство зачастую очень сложно. Поэтому здесь будут изложены некоторые основные факты, связанные с выпуклостью, без доказательств, в расчете на их интуитивную убедительность.

1. Выпуклые множества на плоскости

Любая геометрическая фигура на плоскости может рассматриваться как множество точек, принадлежащих этой фигуре. Одни множества (например, круг, прямоугольник, полоса между параллельными прямыми) содержат и внутренние, и граничные точки; другие (например, отрезок, окружность) состоят только из граничных точек.

Множество точек на плоскости называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве (рис. 1).

Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость (часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой), вся плоскость. Другие примеры выпуклых множеств приведены на рис. 2,а. На рис. 2,б приведены примеры невыпуклых множеств.

Множество, состоящее из одной-единственной точки, и пустое множество, не содержащее ни одной точки, по принятому соглашению, также считаются выпуклыми. Во всяком случае, в этих множествах невозможно провести отрезок, соединяющий какие-то точки этих множеств и не принадлежащий этим множествам целиком, — в них