Математическое приложение

I. Суммарные, средние и предельные величины

Допустим, что некоторая фирма может производить большее или меньшее количество изделий в единицу времени. Соответственно этому различными будут и затраты фирмы в единицу времени. В качестве примера мы можем рассмотреть данные, представленные в двух первых столбцах таблицы.

Суммарные, средние и предельные затраты

Число изделий в месяц, шт.	Общие затраты, тыс. руб.	Затраты на одно изделие	
		средние	предельные
0	0	...	...
1	30	30	30
2	38	19	8
3	48	16	10
4	60	15	12
5	80	16	20

Общие затраты фирмы связаны с изготовлением всех изделий. А какова величина затрат, приходящихся на одно изделие?

Однозначный ответ на этот вопрос можно дать только тогда, когда затраты строго пропорциональны количеству изделий. Но это совершенно исключительный частный случай. Во всех остальных случаях необходимы уточнения.

Во-первых, можно говорить о *средних* затратах на одно изделие, как бы распределив затраты между всеми изделиями поровну. Чтобы найти величину средних затрат, достаточно разделить общую сумму затрат на число изделий. Так построен третий столбец таблицы.

Но средние затраты ничего не говорят о том, как изменятся затраты при изменении количества производимых изделий. Величина изменения затрат при изменении числа изделий на единицу называется *предельными* затратами на одно изделие. Предельные затраты приведены в 4-м столбце таблицы: здесь каждое число получено вычитанием из соответствующей величины общих затрат предыдущего значения этой же величины.

Иногда предельные затраты определяют как «затраты, связанные с изготовлением последнего изделия».

Такое определение не следует понимать слишком буквально. Если, например, изготовление 4 изделий в месяц связано с затратами в 60 тыс. р., а 5 изделий — 80 тыс. р., то это не значит, что дополнительные затраты в 20 тыс. р. связаны с каким-то конкретным (5-м) экземпляром изделия. Все эти изделия могут изготавливаться одновременно. «Затраты на 5-е изделие» означают, что при переходе от выпуска 4-х к выпуску 5-ти изделий в месяц затраты возрастут на 20 тыс. р. в месяц.

Вопросы, подобные рассмотренным на примере таблицы, возникают и при анализе затрат какого-либо конкретного ресурса (труда, металла, электроэнергии т. п.) в зависимости от объема производства, и при анализе выручки от продажи того или иного количества товара, и во многих других экономических задачах. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем говорить о суммарных, средних и относительных величинах безотносительно к их конкретному экономическому содержанию.

Пусть функция $y = f(x)$ описывает зависимость суммарной величины y (затрат, дохода, прибыли и т. п.) от величины x, характеризующей объем производства, продаж, потребления и т. д. В большинстве случаев (в отличие от рассмотренного выше примера) величина x не является целочисленной: либо она бесконечно делима и измеряется в тоннах, литрах, киловатт-часах и тому подобных единицах; либо измеряется в штуках, но настолько велика, что изменение на одну штуку совершенно неощутимо (например, часы или радиоприемники). Поэтому мы будем считать ее величиной непрерывной и ограничим лишь условием $x > 0$,

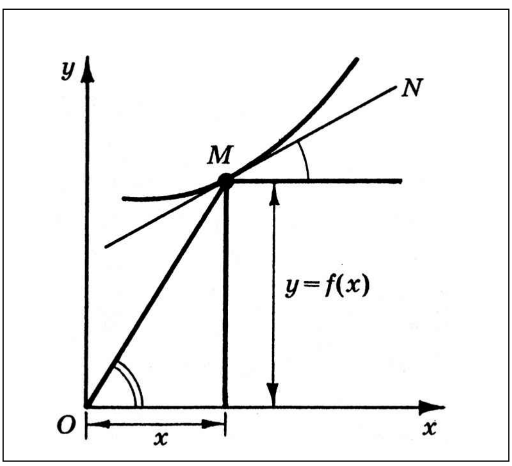

Рис. 1. Угол наклона к оси абсцисс кривой в точке M — это угол наклона касательной MN; он характеризует предельную величину $f'(x)$. Угол наклона радиуса—вектора OM характеризует среднюю величину $\bar{f}(x)$.

Среднюю величину определим как частное

$$\bar{f}(x) = f(x) / x. \quad (1)$$

Изменение аргумента на величину Δx, т. е. переход от объема x к объему $x + \Delta x$, вызывает изменение суммарной величины от $f(x)$ до $f(x + \Delta x)$, т. е. ее прирост равен $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Отношение $\Delta f / \Delta x$ характеризует изменение суммарной величины на единицу приращения величины x. Но так как мы считаем величину x непрерывно изменяющейся, никакой «минимальной порции» приращения не существует, и предельная величина определяется как предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x), \tag{2}$$

то есть представляет собой производную от суммарной величины по аргументу x (с чем и связаны термины «предельные затраты», «предельный доход» и аналогичные).

Рис. 1. иллюстрирует геометрические свойства введенных величин. Возьмем на графике функции суммарной величины произвольную точку M. Ее координаты x и $y = f(x)$. Проведем отрезок из начала координат в точку M (он называется радиусом-вектором точки M). На рисунке видно, что угловой коэффициент радиуса-вектора представляет среднюю величину $\bar{f}(x)$. Предельной величине соответствует угловой коэффициент касательной к графику в точке M.

Из таблицы видно, что с изменением объема x и средняя, и предельная величины изменяются, причем характер изменения этих величин различен. В дальнейшем среднюю величину $\bar{f}(x)$ и предельную — величину $f'(x)$ будем рассматривать как функции объема x.

Непосредственно из определений (1) и (2) можно вывести основные свойства этих функций:

если $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
то $\bar{g}(x) = \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x)$
и $g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$;

если $g(x) = af(x)$,
то $\bar{g}(x) = a\bar{f}(x)$
и $g'(x) = af'(x)$.

Если $f(x) = ax$, то $\bar{f}(x) = a$ и $f'(x) = a$, т. е. в случае, когда суммарная величина пропорциональна аргументу, средняя величина совпадает с предельной при всех значениях x. Графиком такой зависимости служит прямая, проходящая через начало координат. Радиус-вектор любой точки на этой прямой целиком лежит на ней; касательная к прямой — сама эта прямая, так что в рассматриваемом случае оба угловых коэффициента совпадают.

Рассмотрим теперь график суммарной величины, представленный на рис. 2,a. Такой вид кривой характерен для зависимо-

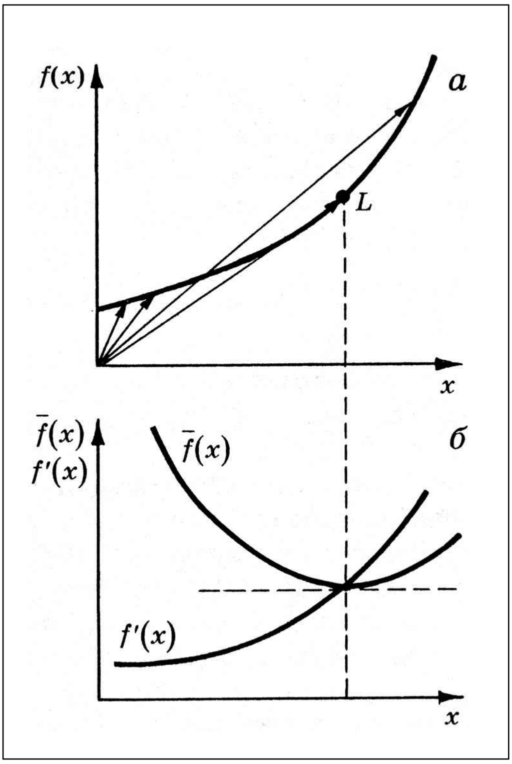

Рис. 2.
а — кривая суммарной величины; *б* — кривая средней и предельной величин.

сти затрат от объема производства. Представляемая этим рисунком функция $y = f(x)$ выпукла, с ростом x наклон графика возрастает, так что $f'(x)$ — возрастающая функция. Характер изменения средней величины иной. При возрастании x наклон радиуса-вектора уменьшается от бесконечности до минимального значения, достигаемого в точке L, а затем вновь начинает возрастать.

Рассмотрим условия возрастания и убывания средней величины в общем случае. Равенство (1) позволяет представить суммарную величину в виде

$$f(x) = x \cdot \bar{f}(x).$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$f'(x) = \bar{f}(x) + x \cdot \frac{d\bar{f}(x)}{dx},$$

откуда

$$\frac{d\bar{f}(x)}{dx} = \frac{f'(x) - \bar{f}(x)}{x}. \tag{3}$$

Так как $x > 0$, знак производной $d\bar{f}(x)/dx$ совпадает со знаком разности $f'(x) - \bar{f}(x)$. Поэтому справедлива следующая теорема об изменении средней величины:

если при данном значении x выполняется неравенство

$$f'(x) > \bar{f}(x),$$

то x — точка возрастания средней величины $\bar{f}(x)$;

если при данном значении x выполняется неравенство

$$f'(x) < \bar{f}(x),$$

то x — точка убывания средней величины $\bar{f}(x)$ (рис. 3).

Из соотношения (3) следует также условие экстремума — максимума или минимума — средней величины. Если производная некоторой функции непрерывна, то сама эта функция достигает экстремальных значений в тех точках, где производная обращается в нуль. Таким образом, при непрерывном изменении предельной величины справедливо следующее условие локального экстремума средней величины: локальные максимумы и минимумы средних величин расположены в тех точках, в которых выполняется равенство

$$f'(x) = \bar{f}(x). \qquad (4)$$

На рис. 2 есть такая точка — L. Здесь радиус-вектор касается графика функции, или, что то же самое, касательная проходит через начало координат.

Но предельная величина не во всех случаях изменяется непрерывно. В некоторых точках она может изменяться скачком (рис. 4). Кривая суммарной величины в таких точках имеет излом. Средняя величина в этих точках будет принимать экстремальные значения, если при этом будет меняться знак разности $f'(x) - \bar{f}(x)$.

Мы подробно остановились на описании участков возрастания и убывания средней величины, точек ее максимума и минимума, потому что эти участки и эти точки играют существенную роль в описании поведения субъекта на рынке. В заключение рассмотрим случай, когда объем x — целочисленная величина, поскольку и такие случаи могут представлять практический интерес (примерами могут служить производство крупных генераторов, судов и т. д.).

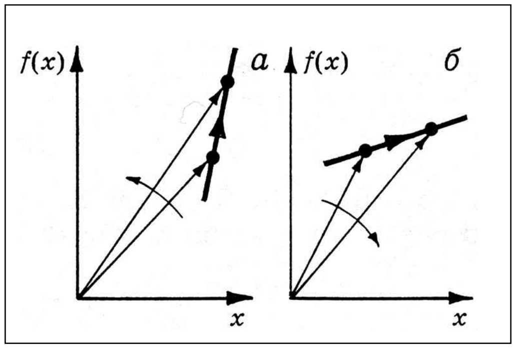

Рис. 3. Геометрическое представление условий: возрастания средней величины (*а*), убывания средней величины (*б*).

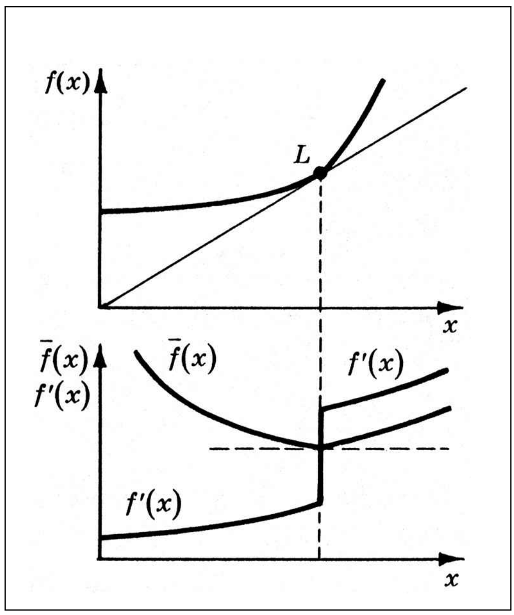

Рис. 4. Кривая суммарной величины имеет излом в точке *L*. Кривая средней величины имеет в этой точке излом, а кривая предельной величины — разрыв (скачок).

В этом случае удобнее заменить обозначение x на n. Средняя величина по-прежнему определяется равенством

$$\bar{f}(n) = f(n) / n.$$

Для предельной величины будем использовать обозначение $f^*(n)$ (штрих служит символом производной и потому был бы здесь неуместен):

$$f^*(n) = f(n) - f(n-1).$$

Найдем выражение для изменения средней величины при увеличении аргумента на единицу:

$$\bar{f}(n) - \bar{f}(n-1) = \frac{f(n)}{n} - \frac{f(n-1)}{n-1} =$$

$$= \frac{(n-1)f(n) - nf(n-1)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{nf^*(n) - f(n)}{n(n-1)}.$$

После деления числителя и знаменателя на n получаем выражение, аналогичное равенству (3):

$$\bar{f}(n) - \bar{f}(n-1) = \frac{f^*(n) - \bar{f}(n)}{n-1}. \qquad (5)$$

Значение n соответствует минимуму средней величины (локальному), если

$$\bar{f}(n) \le \bar{f}(n-1) \text{ и } \bar{f}(n) \le \bar{f}(n+1).$$

Условие минимума в отличие от (4) будет представлять собой систему двух неравенств, одно из которых следует из (5) непосредственно, а другое — после замены n на $n + 1$:

$$\begin{cases} f^*(n) \le \bar{f}(n); \\ f^*(n+1) \ge \bar{f}(n+1). \end{cases} \qquad (6)$$

Проверьте выполнение этого условия на данных таблицы.

Условие максимума средней величины получается изменением знаков неравенств в системе (6) на противоположные.

Упражнения

1. Суммарная величина описывается функцией

$$f(x) = a + bx + cx^2,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Найдите явные выражения для $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$, участки возрастания и убывания средней величины и положение ее минимума; представьте результаты графически.

2. Функция $f(x)$ задана графически (рис. 5). Постройте качественно графики функций $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$. Чем интересны точки a, b, c, d?

3. Суммарная величина описывается степенной функцией $f(x) = ax^b$. Докажите, что при всех x средние затраты пропорциональны предельным.

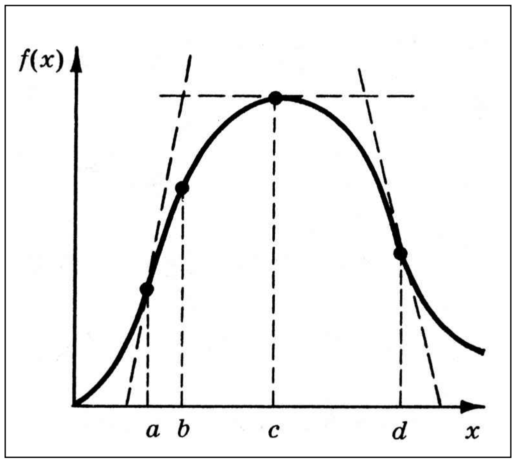

Рис. 5. К упражнению 2.

Советуем Вам после прочтения Математического приложения II выполнить следующие упражнения, в которых $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой положительной функцией при $x > 0$.

4. Докажите тождества:

$$\mathrm{E}_x[f] = f'(x) / \bar{f}(x);$$

$$\mathrm{E}_x\left[\bar{f}\right] = \mathrm{E}_x[f] - 1.$$

5. Докажите, что $\bar{f}(x)$ возрастает при убывает при $\mathrm{E}_x(f) < 1$ и принимает экстремальное значение при $\mathrm{E}_x(f) = 1$.

II. Эластичность функции

Пусть величина y зависит от величины x, и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Главный вопрос анализа зависимостей — это выяснение того, как изменится зависимая переменная y вследствие изменения аргумента x. Основное понятие дифференциального исчисления — производная — определяется как предел отношения *абсолютных* приращений переменных

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Но очень часто *относительные* изменения интересуют экономи-